Chapitre 12

Calcul des probabilités

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

~Prof : Bouyguir Taher~

Contenu du chapitre 12

I. Dénombrement 1
1. Cardinal d'un ensemble fini 1
2. Le principe fondamental du dénombrement 1
3. Arrangements 2
4. Permutations 3
5. Combinaisons - Propriétés des nombres C_n^p 4
5.1. Les Combinaisons 4
5.2. Propriétés des nombres C_n^p 5
5.3. Triangle de Pascal 5
5.4. Binôme de Newton 6
6. Types de tirages 7

II. Expériences aléatoires – Notion de probabilité 8
1. Parties d'un ensemble 8
2. Expériences aléatoires 9
3. Notion de probabilité 12
4. L'hypothèse d'équiprobabilité 14

III. Probabilité conditionnelle 15

IV. Indépendance 17
1. Événements indépendants 17
2. Épreuves indépendantes - Répétition d'une épreuve 18

V. Les variables aléatoires 20
1. Variable aléatoire 20
2. Espérance mathématique – Variance – Écart-type 21

VI. Loi Binomiale 23

I. Dénombrement

1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1 :

Soit E un ensemble fini et A une partie de E.

Le nombre d'éléments de A est appelé le **cardinal** de A, noté : Card(A).

Exemple 1 :

- Si $A = \{a; b; c; d; e\}$, alors $Card(A) = 5$.
- Si $A = \{0; 1; 2\}$, alors $Card(A) = 3$.
- Si $B = \{3; 6; 9; x; y; z\}$, alors $Card(B) = 6$.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément, donc : $Card(\emptyset) = 0$.

2. Le principe fondamental du dénombrement

Si une procédure peut être découpée en deux étapes,
et qu'il y a m façons possibles de réaliser la première étape,
et qu'il y a n façons possibles de réaliser la seconde étape,
alors la procédure peut être accomplie de $m \times n$ façons.

En général on a la propriété suivante :

Propriété 1 :

Si une procédure peut être découpée en p étapes,

et qu'il y a n_1 façons possibles de réaliser la première étape,
et qu'il y a n_2 façons possibles de réaliser la seconde étape,

$\vdots$

et qu'il y a n_p façons possibles de réaliser la $p^{ième}$ étape,

alors la procédure peut être accomplie de $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ façons.

Exemple 2 :

- Un code comporte deux lettres distinctes suivies d'un chiffre non nul.
  Combien peut-on former de codes distincts ?

  Les trois étapes : choix de la première lettre, de la deuxième, puis du chiffre offrent respectivement 26, 25 et 9 possibilités.

  Le nombre cherché est donc : $26 \times 25 \times 9 = 5\,850$ codes distincts.

- Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 0663 ... ?

Pour choisir les 6 numéros qui suivent, on a :
10 possibilités pour le premier chiffre
10 possibilités pour le deuxième chiffre
⋮
10 possibilités pour le sixième chiffre

Le nombre de numéros possibles est :

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6 = 1\,000\,000$$

3. Arrangements

Définition 2 :

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

- Un **arrangement avec répétitions** de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts.
- Un **arrangement sans répétitions** de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

Propriété 2 :

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

- Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à $\boldsymbol{n^p}$.
- Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note : $\boldsymbol{A_n^p}$ et est égal à :

$$\boldsymbol{A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}}$$

Exemple 3 : Arrangements avec répétitions

Combien de numéros de téléphone à 8 chiffres peut-on former ?

Il s'agit d'une situation d'arrangements avec répétitions puisque l'ordre des chiffres importe et qu'un numéro de téléphone peut comporter plusieurs fois le même chiffre.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des chiffres utilisables pour composer un numéro de téléphone, i.e. $E = \{0; 1; 2; \cdots; 9\}$,
et on a alors $n = \text{Card}(E) = 10$.

On s'intéresse aux arrangements avec répétitions de $p = 8$ éléments de E.
D'après le résultat ci-dessus, il y en a 10^8.

Exemple 4 : Arrangements sans répétitions

- Le tiercé : une course de chevaux comporte 20 partants.
  Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?

Soit E l'ensemble des numéros des chevaux.

On a $\text{Card}(E) = 20$. Un tiercé correspond à un arrangement de 3 éléments de E, il y en a $A_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

- Quel est le nombre de mots comportant 5 lettres distinctes ? (Sans se préoccuper du sens des mots)

Il s'agit d'une situation d'arrangements sans répétitions puisque l'ordre des lettres importe et que l'on requiert qu'elles soient distinctes.

Avec les notations précédentes, l'ensemble E est constitué des lettres de l'alphabet, i.e. $E = \{a; b; \cdots; z\}$, et on a alors $n = \text{Card}(E) = 26$.

On s'intéresse aux arrangements sans répétitions de $p = 5$ éléments de E.

Donc le nombre de mots de 5 lettres distinctes est :

$$A_{26}^5 = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7\,893\,600.$$

- Un porte manteau comporte 5 patères.
  De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents ? (Au plus un manteau par patère)

Notons $P_1, \ldots, P_5$ les 5 patères.

Chaque rangement peut se voir comme un arrangement de 3 éléments de l'ensemble $E = \{P_1, \ldots, P_5\}$. Par exemple, $P_2P_1P_4$ signifie "manteau n°1 sur P_2, manteau n°2 sur P_1 et manteau n°3 sur P_4".

Il y a donc $A_5^3 = 60$ rangements possibles.

4. Permutations

Définition 3 :

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Une **permutation** des éléments de E est un arrangement sans répétitions des éléments de E.

Propriété 3 :

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre : $n!$ (factorielle n) défini par :

$$\boldsymbol{n! = A_n^n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

Convention :

Par convention : $0! = 1$.

Exemple 5 :

- De combien de façons peut-on repartir 7 personnes sur 7 chaises ?

Désignons par $p_1, p_2, \ldots, p_7$ les 7 personnes et posons $E = \{p_1, p_2, \ldots, p_7\}$.
Une répartition peut se voir comme un arrangement des 7 éléments de E, c'est-à-dire une permutation de E, il y en a : $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5\,040$.

- De combien de façons pouvez-vous ranger 10 livres sur une étagère ?

Il s'agit des permutations d'un ensemble de 10 éléments.
Il y a donc : $10! = 3\,628\,800$ rangements possibles.

- De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

Il s'agit des permutations d'un ensemble de 36 éléments.
Il y a donc : $36! \simeq 3{,}72 \times 10^{41}$ façons possibles.

5. Combinaisons - Propriétés des nombres C_n^p

5.1. Les Combinaisons

Définition 4 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de n éléments et p un entier vérifiant $1 \leq p \leq n$.

On appelle **combinaison** de p éléments de E toute partie (ou tout sous-ensemble) de E possédant p éléments.

Exemple 6 :

Si : $E = \{a; b; c\}$ et $p = 2$.
Alors les combinaisons de deux éléments de E sont les parties :

$$\{a; b\}, \{a; c\} \text{ et } \{b; c\}$$

Propriété 4 :

Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par : C_n^p, et on a :

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Remarque :

- C_n^p représente le nombre de façons de choisir p objets parmi n (l'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétition).
- Quelques cas particuliers (à connaître) : $\boldsymbol{C_n^0 = C_n^n = 1}$ et $\boldsymbol{C_n^1 = C_n^{n-1} = n}$

Exemple 7 :

1) Le nombre de comités de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 personnes est : $C_{20}^3 = 1\,140$.

2) Le loto : On tire au hasard 6 boules parmi 49.
Combien de tirages possibles ?

Le nombre de tirages possibles est le nombre de façons de choisir 6 objets parmi 49,

soit : $C_{49}^6 = \dfrac{A_{49}^6}{6!} = \dfrac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13\,983\,816$

3) Le Poker : Dans un jeu de 32 cartes, on choisit 5 cartes au hasard (ces 5 cartes s'appellent une "main").

- Nombre de mains total : $C_{32}^5 = \dfrac{A_{32}^5}{5!} = 201\,376$.
- Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as :
  Le nombre de façons de choisir 3 as parmi 4 est C_4^3, le nombre de façons de choisir 2 cartes parmi 28 "non as" est : C_{28}^2.
  On applique le principe multiplicatif, ce qui donne : $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1\,512$.
- Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as : $C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 1\,540$.

5.2. Propriétés des nombres C_n^p

Propriété 5 :

Pour tout entier n et tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

- $\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}$ $\quad (Symétrie)$
- $\boldsymbol{C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}}$ $\quad (Relation\ de\ Pascal)$

5.3. Triangle de Pascal

Le triangle de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux de la façon suivante : pour trouver un certain coefficient, on additionne dans le tableau suivant les coefficients situés "juste au-dessus" et "juste au-dessus à gauche" entre eux :

n \ p	0	1	2	3	4	5	…	…
0	$C_0^0 = 1$							
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$						
2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$					
3	$C_3^0 = 1$	$C_3^1 = 3$	$C_3^2 = 3$	$C_3^3 = 1$				
4	$C_4^0 = 1$	$C_4^1 = 4$	$C_4^2 = 6$	$C_4^3 = 4$	$C_4^4 = 1$			
5	$C_5^0 = 1$	$C_5^1 = 5$	$C_5^2 = 10$	$C_5^3 = 10$	$C_5^4 = 5$	$C_5^5 = 1$		
⋮								
⋮								

5.4. Binôme de Newton

Propriété 6 : Formule du binôme de Newton

Pour tous réels a et b et tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^p \cdot b^{n-p}$$

Exemple 8 :

À l'aide de cette formule et du triangle de Pascal, on a :

- $(a+b)^5 = \sum_{p=0}^{5} C_5^p \, a^p \cdot b^{5-p}$

$= C_5^0 a^0 \cdot b^5 + C_5^1 a^1 \cdot b^4 + C_5^2 a^2 \cdot b^3 + C_5^3 a^3 \cdot b^2 + C_5^4 a^4 \cdot b^1 + C_5^5 a^5 \cdot b^0$

$= b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5$

- $(a-b)^4 = \big(a+(-b)\big)^4 = \sum_{p=0}^{4} C_4^p \, a^p \cdot (-b)^{4-p}$

$= C_4^0 a^0 (-b)^4 + C_4^1 a^1 (-b)^3 + C_4^2 a^2 (-b)^2 + C_4^3 a^3 (-b)^1 + C_4^4 a^4 (-b)^0$

$= b^4 - 4ab^3 + 6a^2b^2 - 4a^3b + a^4$

- Le coefficient du terme a^4b^7 dans le développement de $(a+b)^{11}$ est :

$C_{11}^4 = 330$.

Remarque :

- La somme des exposants de a et b est, pour chaque terme, égale à n.
- En raison de leur rôle dans cette formule, les nombres C_n^p sont appelés coefficients binomiaux.

6. Types de tirages

On tire p objets parmi n objets.

Type de tirage	Nombre de tirages possible	L'ordre
Simultané	C_n^p	n'a pas d'importance
Successif sans remise	A_n^p	est important
Successif avec remise	n^p	est important

Exemple 9 :

Une urne contient 10 boules numérotées : 0, 1, ... , 9.
On en tire simultanément trois boules.

Le nombre de tirages différents est : $C_{10}^3 = 120$.

Exercice :

Un sac contient quatre boules rouges, trois boules noires et trois boules vertes.
On suppose que toutes les boules sont identiques.

1) On tire simultanément trois boules de ce sac.

   a. Quel est le nombre des tirages possibles ?

   b. Quel est le nombre des tirages possibles contenant deux boules noires et une verte ?

   c. Quel est le nombre des tirages possibles contenant exactement une boule rouge ?

   d. Quel est le nombre des tirages possibles contenant au moins une boule noire ?

2) Mêmes questions pour un tirage successif sans remise.

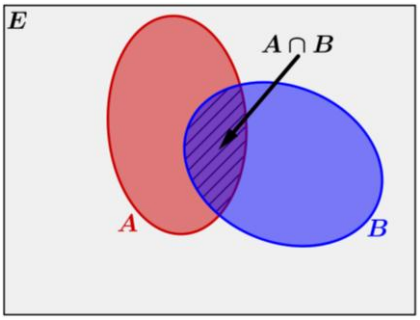
II. Expériences aléatoires – Notion de probabilité

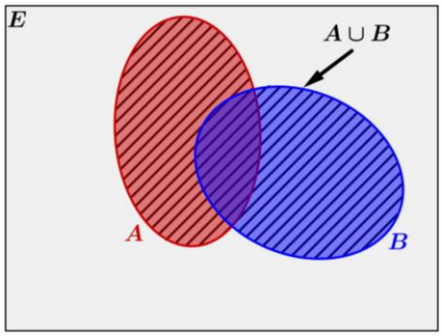
1. Parties d'un ensemble

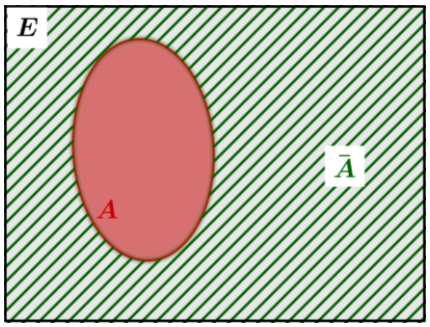
Définition 1 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

- L'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et dans B est noté : $A \cap B$.
  On dit que c'est l'**intersection** de A et B et se lit A inter B.
- L'ensemble formé des éléments qui sont soit dans A, soit dans B est noté : $A \cup B$.
  On dit que c'est la **réunion** de A et B et se lit A union B.
- L'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A est noté : $\overline{A}$.
  C'est le **complémentaire** de l'ensemble A dans E.
- Si tous les éléments de A sont des éléments de B, on note : $A \subset B$.
  On dit que A est **inclus** dans B.
- Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**.







Remarque :

➢ $x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$	➢ $x \in (A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$
➢ $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \notin A)$	➢ $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Exemple 1 :

Considérons les ensembles :

$$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}, \quad A = \{1; 3; 5; 7\} \quad \text{et} \quad B = \{0; 3; 6\}$$

A et B sont deux parties de E tels que :

$$A \cap B = \{3\} \quad \text{et} \quad A \cup B = \{0; 1; 3; 5; 6; 7\}.$$

On a aussi : $\overline{A} = \{0; 2; 4; 6; 8\}$ et $\overline{B} = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.

Propriété 1 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble fini E.

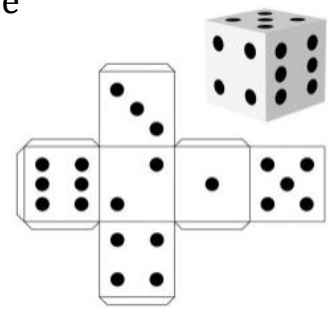
- On a : $\mathbf{Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)}$.
- Si A et B sont disjoints, alors : $\mathbf{Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)}$.

2. Expériences aléatoires

Activité :

On Considère l'expérience suivante :

On lance une seule fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au résultat apparu sur la face supérieure.



On ne peut pas prédire exactement quel numéro désignera le dé.
Une telle expérience est appelée expérience aléatoire.

Un résultat possible est appelé éventualité ou issue.
L'ensemble des résultats possibles est : {1; 2; 3; 4; 5; 6}.
Cet ensemble est appelé univers des éventualités, on le note généralement Ω.

Donnons explicitement les parties suivantes de l'univers Ω.

A : « Le dé désigne un nombre pair ».
B : « Le dé désigne un nombre supérieur strictement à 5 ».
C : « Le dé désigne un nombre impair ».
D : « Le dé désigne un nombre supérieur strictement à 6 ».
E : « Le dé désigne un nombre supérieur ou égale à 1 ».

- On a : $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{6\}$, $C = \{1; 3; 5\}$, $D = \emptyset$ et $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$.
- Les parties A, B, C, D et E s'appellent des événements de Ω.
- L'événement C contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A. C est appelé événement contraire de A.
- L'événement B contient une seule issue, on l'appelle événement élémentaire.
- L'événement D ne contient aucune issue, on l'appelle événement impossible.
- L'événement E contient toutes les issues, on l'appelle événement certain.

Vocabulaire :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience, dont nul ne peut prévoir avec certitude quel en sera le résultat, résultat qui dépend en effet du hasard.
- Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés les **éventualités** ou les **issues** de l'expérience aléatoire.
- L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **l'univers des éventualités**, on le note souvent Ω.

- Un **événement** est une partie de l'univers Ω.
- Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que : ω réalise A.
- Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
- L'événement Ω est appelé **l'événement certain**. (Ω se réalise toujours).
- L'événement ∅ et appelé **l'événement impossible**. (∅ ne se réalise jamais).
- L'événement "**A ou B** " est l'événement formé des issues qui réalisent l'un au moins des événements A et B, il est noté $A \cup B$.
- L'événement "**A et B** " est l'événement formé des issues qui réalisent à la fois A et B, il est noté $A \cap B$.
- L'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un événement appelé **événement contraire** de A, noté $\overline{A}$.

  On a : $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.
- Deux événements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps sont dits **incompatibles**. Autrement dit :

  Si : $A \cap B = \emptyset$, alors les deux événements A et B et sont incompatibles.

Tableau récapitulatif

Notations	Langage ensembliste	Langage probabiliste
Ω	$\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \cdots; \omega_n\}$	univers des éventualités
$\{\omega_i\}$	élément de Ω	évènement élémentaire
$A \subset \Omega$	A une partie de Ω	A est un évènement
∅	ensemble vide	évènement impossible
$\omega \in A$	ω appartient à A	le résultat ω est une des réalisations possibles de A
$C = A \cup B$	C est réunion de A et B	C est l'évènement « A ou B »
$C = A \cap B$	C est l'intersection de A et B	C est l'évènement « A et B »
$\overline{A} = B$	B est complémentaire de A	B est l'évènement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

Exemple 2 :



On lance une pièce de monnaie équilibrée en l'air.

On regarde si la face supérieure est **P**ile ou **F**ace.

L'univers des éventualités est : $\Omega = \{P; F\}$, et $\text{Card}(\Omega) = 2$.

Les événements élémentaires sont : $\{P\}$ et $\{F\}$.

Exemple 3 :

On lance deux fois de suite une pièce équilibrée en l'air.

L'univers des éventualités est : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$, et $\text{Card}(\Omega) = 4$.

Les événements élémentaires sont : $\{PP\}$, $\{PF\}$, $\{FP\}$ et $\{FF\}$.

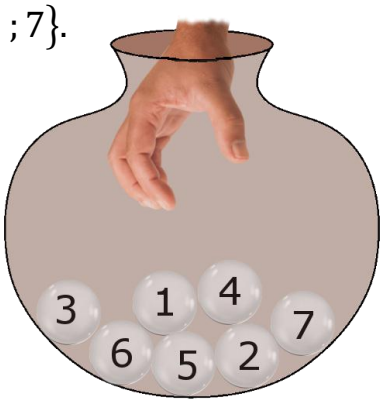
Exemple 4 :

Une urne contient sept boules numérotées de 1 à 7, indiscernables au toucher.

(les boules indiscernables au toucher signifie qu'on ne peut pas les distinguer au toucher).

On effectue l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne. Cette expérience est une expérience aléatoire, dont les issues possibles sont 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7.



- L'univers associé à cette expérience est : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$.
- Soit l'événement A « sortie d'un nombre impair »
  Les issues 1 ;3 ;5 ;7 réalisent A, alors $A = \{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$.
- Soit l'événement B « sortie d'un nombre pair »
  Les issues 2 ;4 ;6 réalisent B, alors $B = \{2 ; 4 ; 6\}$.
  On remarque que : $A \cup B = \Omega$ et $A \cap B = \emptyset$,
  alors $B = \overline{A}$ (B est l'événement contraire de A).
- Soit l'événement C « sortie d'un nombre supérieur strictement à 6 ».
  7 est la seule issue qui réalise C, alors $C = \{7\}$ qui est un événement élémentaire.
- Soit l'événement D « sortie d'un nombre supérieur ou égal à 1 »
  Les issues 1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 réalisent D, alors $D = \Omega$ qui est l'événement certain.
- Soit l'événement E « sortie d'un nombre supérieur à 8 »
  Aucune issue ne réalise E, alors $E = \emptyset$ qui est l'événement impossible.
- Soit l'événement F « sortie d'un nombre multiple de 3 »
  Les issues 3 et 6 réalisent F, alors $F = \{3; 6\}$.
- Soit l'événement G « sortie d'un nombre pair multiple de 3 »
  Les issues qui réalisent G sont les issues réalisant à la fois les événements B et F, alors : $G = B \cap F = \{6\}$.

- Soit l'événement L « sortie d'un nombre pair ou multiple de 3 »
  Alors : $L = B \cup F = \{2; 3; 4; 6\}$.

  On remarque que $B \cap C = \emptyset$, donc B et C sont incompatibles.

3. Notion de probabilité

Activité :

On a simulé n lancers d'un dé équilibré à si faces, numérotées de 1 à 6, et on a noté le nombre d'apparition du nombre 4.

Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus.

Le nombre de lancers n	10	50	100	500	1000	10000	100000
Le nombre d'apparition du nombre 4	3	10	19	76	161	1681	16649
Les fréquences d'apparition du nombre 4	0,3	0,2	0,19	0,152	0,161	0,1681	0,16649

On remarque que les fréquences d'apparition du nombre 4 se rapprochent de $0{,}166 \approx \frac{1}{6}$ lorsque n est assez grand.

On dit que : le nombre 4 a une chance sur 6 d'être désigné par le dé, et la probabilité que le dé désigne le nombre 4 est $\frac{1}{6}$, et on écrit : $p(\{4\}) = \frac{1}{6}$.

On procède de la même manière et on trouve :

$p(\{1\}) = \frac{1}{6}$, $p(\{2\}) = \frac{1}{6}$, $p(\{3\}) = \frac{1}{6}$, $p(\{5\}) = \frac{1}{6}$, $p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

On remarque aussi que tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité, et que : $p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = \frac{6}{6} = 1$.

Définition 2 :

Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Lorsque les fréquences de chaque événement élémentaire $\{\omega_i\}$ se stabilisent autour d'une valeur p_i, alors p_i est appelée la **probabilité** de $\{\omega_i\}$ et on écrit $p(\{\omega_i\}) = p_i$ avec : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
- Pour tout événement A inclus dans Ω, on définit $p(A)$ comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui définissent A, ce qui veut dire que :

  Si $A = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_k\}$, alors : $p(A) = p(\{\omega_1\}) + p(\{\omega_2\}) + \cdots + p(\{\omega_k\})$.

Exemple 5 :

On lance une seule fois un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.
Calculons la probabilité des événements suivants :

A : " le dé désigne un multiple de 5 ".
B : " le dé désigne un multiple de 3 ".
C : " le dé désigne un nombre pair ".
D : " le dé désigne un nombre supérieur ou égal à 3 ".



On a : $A = \{5\}$, $B = \{3\,;6\}$, $C = \{2\,;4\,;6\}$ et $D = \{3\,;4\,;5\,;6\}$.

Donc : $p(A) = p(\{5\}) = \frac{1}{6}$

$$p(B) = p(\{3\,;6\}) = p(\{3\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(C) = p(\{2\,;4\,;6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$p(D) = p(\{3\,;4\,;5\,;6\}) = p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Propriété 2 :

Soient A et B deux événements d'un univers des issues Ω, On a :

- La probabilité de l'événement impossible est 0 : $\boldsymbol{p(\emptyset) = 0}$.
- La probabilité de l'événement certain est 1 : $\boldsymbol{p(\Omega) = 1}$.
- La probabilité de l'événement A est un nombre compris entre 0 et 1 : $\boldsymbol{0 \leq p(A) \leq 1}$.
- $\boldsymbol{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- La probabilité de l'événement contraire de A est : $\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$.

Tableau récapitulatif

Parties de Ω	Vocabulaire des évènements	Propriété
A	A évènement quelconque	$0 \leq p(A) \leq 1$
$\varnothing$	évènement impossible	$p(\emptyset) = 0$
Ω	Évènement certain	$p(\Omega) = 1$
A; B	A et B quelconques	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
$\overline{A}$	$\overline{A}$ est l'évènement contraire de A	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

4. L'hypothèse d'équiprobabilité

Définition 3 :

On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemples de situations d'équiprobabilité:

- Lancer une pièce de monnaie non truquée une ou plusieurs fois,
- Lancer un dé équilibré ou non pipé une ou plusieurs fois,
- Tirer au hasard des boules indiscernables au toucher,
- Choisir au hasard une ou plusieurs personnes.

Propriété 3 :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

Dans une situation d'équiprobabilité on a :

- La probabilité d'un événement élémentaire est égale à : $\frac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
- La probabilité d'un événement A est égale à :

$$p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Application 1 :

Un sac contient quatre boules jaunes numérotées 1,1,1,2 et trois boules rouges numérotées 1,1,2 et deux boules vertes numérotées 1,2 indiscernables au toucher.

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard simultanément trois boules du sac.

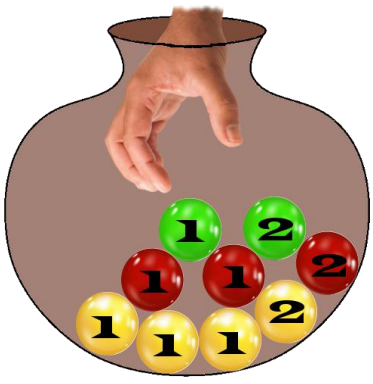
1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : " Tirer trois boules de même couleur ".

B : " Tirer trois boules portant le même numéro ".

C : " Tirer exactement une boule verte ".

D : " Tirer au moins une boule verte ".



2) Calculer : $p(A \cap B)$ et $p(A \cup B)$.

Application 2 :

Une urne contient sept boules jaunes et quatre boules rouges.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : " Tirage de deux boules jaunes ".

B : " Tirage de deux boules de même couleur ".

C : " Tirage de deux boules de couleurs différentes ".

D : " La première boule tirée de couleur jaune ".

E : " Tirage d'au moins une boule jaune ".

2) Calculer $p(\mathrm{B} \cap \mathrm{E})$ et $p(\mathrm{B} \cup \mathrm{E})$.

III. Probabilité conditionnelle

Les probabilités conditionnelles prennent en compte les informations concernant l'issue d'une expérience qui modifient la probabilité des événements liés à cette expérience.

Si je jette un dé non truqué, la probabilité d'obtenir un 6 est de $\frac{1}{6}$.

Si je lance ce même dé, qu'une tierce personne me cache le résultat et me dit « *j'ai vu que le résultat est pair* », la probabilité de l'événement « avoir un 6 » change.

Je sais que les issues possibles se réduisent maintenant aux nombres 2, 4, 6.

La probabilité d'obtenir un 6 devient donc $\frac{1}{3}$.

On dit que la probabilité d'obtenir 6, sachant que le nombre obtenu est pair, est de $\frac{1}{3}$.

Définition :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire muni d'une probabilité p.

Soient A et B deux événements de Ω tel que : $p(\mathrm{A}) \neq 0$.

- On appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement B sachant que A est réalisé, le réel :

$$\boldsymbol{p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}}$$

- Le réel $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ se note aussi $p(\mathrm{B}/\mathrm{A})$ et se lit aussi probabilité de B sachant A.

Exemple :

Lors d'un sondage,
50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement
et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement.
De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement.

On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard, et on considère les événements :

S « la personne interrogée pratique un sport régulièrement »
et C « la personne interrogée va au cinéma régulièrement ».

On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a : $p(C) = 0{,}75$ et $p(S \cap C) = 0{,}4$.

Donc : $p_C(S) = \dfrac{p(S \cap C)}{p(C)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}75} \approx 0{,}53$.

Application 3 :

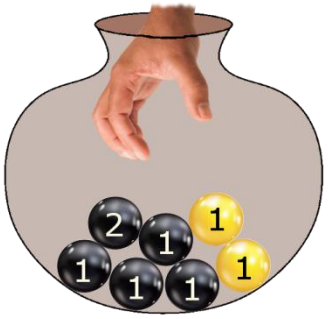
Une urne contient cinq boules noires numérotées 1,1,1,1,2
et deux boules jaunes numérotées 1,1

On tire au hasard simultanément deux boules (les boules sont indiscernables au toucher).
On considère les deux événements :

C : " Tirer deux boules de même couleur".

N : " Tirer deux boules portant le même numéro".

Calculer : $p_N(C)$ et $p_C(N)$.



Remarques :

- Généralement on a : $p_A(B) \neq p_B(A)$.
- Dans une situation d'équiprobabilité, on a : $p_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

Propriété : formule des probabilités composées

Pour tout événement A et B de probabilité non nulle, on a :

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{p(A \cap B) = p(B) \times p_B(A)}$$

Propriété : formule des probabilités totales

Pour tout événement A et B tel que $0 < p(A) < 1$, on a :

$$\boldsymbol{p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)}$$

Application 4:

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope.

La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,3.

La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est de 0,2.

1) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?
2) Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?
3) Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?

Application 5:

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables.

U_1 contient 4 boules rouges et trois boules vertes,

U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte.

On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.

Calculer la probabilité pour qu'elle soit rouge.

IV. Indépendance

1. Événements indépendants

Définition 1 :

Soient A et B deux événements.

A et B sont dits **indépendants** si : $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p(B)}$.

Propriété 1 :

Soient A et B deux événements de probabilités respectives non nulles.

- A et B sont indépendants si et seulement si $\boldsymbol{p_A(B) = p(B)}$.
- A et B sont indépendants si et seulement si $\boldsymbol{p_B(A) = p(A)}$.

Remarque :

A et B sont indépendants si et seulement si la probabilité de B sachant A est égale à la probabilité de B. Ceci équivaut à dire que la réalisation ou la non réalisation de l'événement A n'a pas d'influence sur la probabilité de l'événement B et vice versa.

Exemple 1 :

Une urne contient 2 boules noires et 8 blanches et donc 10 boules au total.

On tire deux boules de cette urne.

On note A l'événement « la première boule tirée est noire »
et B l'événement « la deuxième boule tirée est noire ».

- Si le tirage de ces deux boules s'effectue successivement avec remise de la boule tirée dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{10}$ et ceci quelle que soit la couleur de la boule tirée en premier.

Dans cette situation les événements A et B sont indépendants.

- Si le tirage de ces deux boules s'effectue successivement sans remise de la boule dans l'urne, la probabilité de B est $\frac{2}{9}$ si la première boule tirée est blanche et $\frac{1}{9}$ si la première boule tirée est noire.

La probabilité de B varie en fonction de la réalisation ou de la non réalisation de l'événement A.

Dans cette situation les événements A et B ne sont pas indépendants.

Application 6:

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons :

trois rouges numérotés 1, 2 et 3,
deux jaunes numérotés 1 et 2,
et un bleu numéroté 1.

On désigne respectivement par R, U et D les événements :

R « le jeton est rouge » , U « le numéro est 1 » et D « le numéro est 2 ».

1) Les événements R et U sont-ils indépendants ?
2) Les événements R et D sont-ils indépendants ?

2. Épreuves indépendantes - Répétition d'une épreuve

Définition 2 :

On considère expérience aléatoire constituée de plusieurs épreuves successives.

Si les issues d'une épreuve n'influent pas sur les résultats des épreuves suivantes, on dit que l'expérience aléatoire est constituée d'**épreuves indépendantes**.

Exemple 2 :



- Les expériences suivantes sont constituées par des épreuves indépendantes.
  - ✓ Jet d'une pièce de monnaie 100 fois successives.
    (chaque jet de la pièce est une épreuve)
  - ✓ Jet d'un dé 13 fois successives.
    (chaque jet du dé est une épreuve)



  - ✓ Tirage de 20 boules successivement et avec remise parmi 4 boules.
    (chaque Tirage d'une boule est une épreuve).

- L'expérience suivante
  « Tirage de 3 boules successivement et sans remise parmi 8 boules »
  n'est pas formée par des épreuves indépendantes.

Propriété 2 :

Soit A un évènement de probabilité p lors d'une épreuve aléatoire, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsqu'on répète cette épreuve n fois de manières identiques et indépendants, alors la probabilité que l'évènement A soit réalisé k fois exactement est :

$$\boldsymbol{C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}} \quad \text{ou} \quad k \in \{1; 2; \ldots; n\}.$$

Exemple 3 :

On lance 8 fois un dé cubique bien équilibré.

✓ La probabilité d'obtenir « le numéro 5 » trois fois exactement est :

$$C_8^3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-3} = 56 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{56 \times 5^5}{6^8} \approx 0{,}104$$

✓ La probabilité d'obtenir « le numéro 5 » une fois exactement est :

$$C_8^1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-1} = 8 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{8 \times 5^7}{6^8} \approx 0{,}372$$

✓ La probabilité d'obtenir « le numéro 5 » huit fois exactement est :

$$C_8^8 \times \left(\frac{1}{6}\right)^8 \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{8-8} = 1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^8 \times \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^8} \approx 0{,}0000006$$

Application 7:

On lance 7 fois une pièce de monnaie bien équilibrée.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » trois fois exactement ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » cinq fois exactement ?

V. Les variables aléatoires

1. Variable aléatoire

Introduction :

On considère l'expérience aléatoire :

Lancer une seule fois dans l'air un dé non pipé à six faces numérotées de 1 à 6.

L'univers associé à cette expérience est : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

On considère le jeu suivant :

★ à la sortie d'un nombre pair, on gagne 2 points.

★ à la sortie du nombre 1, on gagne 3 points.

★ à la sortie du nombre 3 ou 5, on perd 4 points.

On note X le gain ou la perte après la fin du jeu.

Ainsi : X prend la valeur 3 à la sortie du nombre 1,

X prend la valeur 2 à la sortie des nombres 2 ou 4 ou 6,

X prend la valeur -4 à la sorte des nombres 3 ou 5.

X est appelé la variable aléatoire définie sur l'univers Ω.

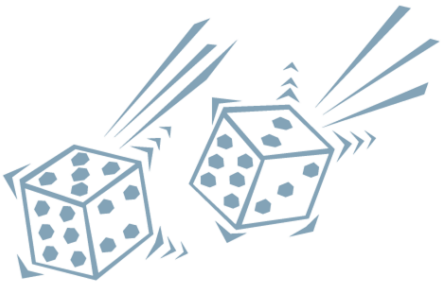
Les réels -4, 2 et 3 sont appelés les valeurs prises par la variable aléatoire X.

On écrit généralement : $X(\Omega) = \{-4; 2; 3\}$.

L'événement $\{3; 5\}$ est noté $(X = -4)$

L'événement $\{2; 4; 6\}$ est noté $(X = 2)$

L'événement $\{1\}$ est noté $(X = 3)$



Calculons : $p(X = -4), p(X = 2)$ et $p(X = 3)$.

On a : $p(X = -4) = \dfrac{\text{Card}(X = -4)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

et $p(X = 2) = \dfrac{\text{Card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

et $p(X = 3) = \dfrac{\text{Card}(X = 3)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{6}$.

En calculant ces probabilités, on dit qu'on a défini la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On peut résumer ces résultats dans le tableau ci-dessous :

x_i	-4	2	3
$p(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

On remarque que : $p(\mathrm{X}=-4)+p(\mathrm{X}=2)+p(\mathrm{X}=3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$.

Définition 1 :

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- Une **variable aléatoire** réelle définit sur Ω est une fonction X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathrm{X}(\Omega)=\{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ des valeurs prises par X s'appelle le **support** de la variable aléatoire X.
- L'événement « X prend la valeur x_i » est noté $(\mathrm{X}=x_i)$ pout tout i de $\{1;2;\ \ldots\ ;n\}$.
- La probabilité de l'événement $(\mathrm{X}=x_i)$ est notée $p(\mathrm{X}=x_i)$.
- Définir la **loi de probabilité** de la variable X, c'est associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $(\mathrm{X}=x_i)$, pout tout i de $\{1;2;\ \ldots\ ;n\}$.

On résume généralement la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p(\mathrm{X}=x_i)$	$p(\mathrm{X}=x_1)$	$p(\mathrm{X}=x_2)$	$\cdots$	$p(\mathrm{X}=x_n)$

Et on a : $p(\mathrm{X}=x_1)+p(\mathrm{X}=x_2)+\cdots+p(\mathrm{X}=x_n)=1$.

2. Espérance mathématique – Variance – Écart-type

Définition 2 :

Soit X une variable aléatoire et $\mathrm{X}(\Omega)=\{x_1;x_2;\ldots;x_n\}$ son support.

On pose : $p(\mathrm{X}=x_i)=p_i$, pour tout i de $\{1;2;\ \ldots\ ;n\}$.

- On appelle **Espérance mathématique** de X, le nombre réel donné par la formule :

$$\mathbf{E(X)}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p_i}\cdot\boldsymbol{x_i}=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+\ \ldots\ +p_n\cdot x_n$$

➢ On appelle **Variance mathématique** de X le nombre réel positif :

$$\mathbf{V(X)} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p_i} \cdot \big(\boldsymbol{x_i} - \mathbf{E(X)}\big)^2$$
$$= p_1 \cdot \big(x_1 - \mathrm{E(X)}\big)^2 + p_2 \cdot \big(x_2 - \mathrm{E(X)}\big)^2 + \ \ldots + p_n \cdot \big(x_n - \mathrm{E(X)}\big)^2$$

➢ On appelle **Écart-type** de X le nombre réel positif : $\boldsymbol{\sigma(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}}$.

Propriété :

La variance est également donnée par la formule : $\mathbf{V(X)} = \mathbf{E(X^2)} - \big(\mathbf{E(X)}\big)^2$

avec : $\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2 = p_1 \cdot x_1^2 + p_2 \cdot x_2^2 + \ \ldots + p_n \cdot x_n^2$

Exemple :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau :

x_i	0	1	2	3
$p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

- L'espérance mathématique de X est :

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{8} \times 0 + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{3}{8} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 = \frac{3}{2}$$

- La variance mathématique de X est :

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{8} \times \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \times \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8} \times \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{2}{3}$$

- L'écart-type de X est :

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Application 8:

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par le tableau :

x_i	0	1	2
$p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$

Calculer l'espérance mathématique, la variance mathématique et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Application 9:

Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   A : « Les boules sont toutes de couleurs différentes »

   B : « Les boules sont toutes de la même couleur ».

2. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules, associe le nombre de boules bleues tirées.

   a. Établir la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

VI. Loi Binomiale

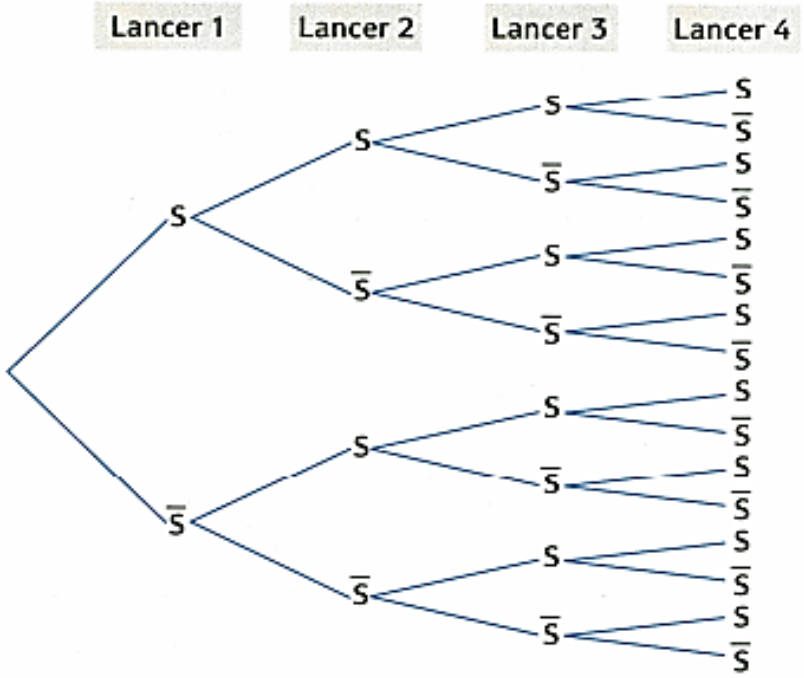
Activité :

➢ **Protocole de l'expérience :** On lance un dé parfait, quatre fois de suite et on s'intéresse au nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des quatre lancers.

Il s'agit donc de répéter quatre fois la même épreuve : lancer d'un dé.
Pour cette épreuve, seules deux issues nous importent :

- « sortie du numéro 6 » appelé « succès », que nous noterons S,
- son événement contraire $\overline{S}$, appelé « échec ».

On suppose les lancers indépendants et l'expérience peut alors être représentée par un arbre pondéré dessiné ci-dessous.



➢ **Issues de l'expérience :** Une issue est une liste de quatre lettres prises dans l'ensemble {S; $\bar{S}$}, par exemple (S; S; $\bar{S}$; S), est représentée par un chemin.

➢ **Variable aléatoire :** On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de réalisations de S durant les quatre épreuves successives.

L'objectif de cette activité est de définir la loi de probabilité de X.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?

2. Complétez l'arbre en indiquant les probabilités sur chacune des branches.

3. En utilisant l'arbre, répondez aux questions suivantes :

a) Calculez $p(X = 0)$ puis $p(X = 4)$.

b) Calculez $p(X = 1)$ puis $p(X = 3)$.

c) Calculez $p(X = 2)$.

d) Dressez le tableau de la loi de X.

Définition :

On considère l'expérience aléatoire où on s'intéresse uniquement aux deux événements S (succès) de probabilité p et $\bar{S}$ (échec) de probabilité $1 - p$.

On répète dans les mêmes conditions et indépendamment n fois cette expérience.

La loi de probabilité de la variable aléatoire, qui est égale au nombre k de succès obtenus, est appelée la **loi binomiale de paramètres n et p**.

Cette loi est définie par :

$$\boldsymbol{p(X = k) = C_n^k\, p^k \cdot (1-p)^{n-k}} \quad \text{avec} \quad k \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

on a : $\boldsymbol{E(X) = np}$; $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$ et $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$

Application 10 :

On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée.
Soit X le nombre de fois que l'on obtient : " Face ".

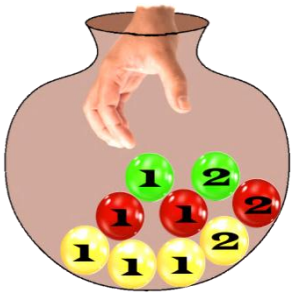
1. Faire un arbre illustrant cette situation.

2. Donner la loi de probabilité de X.

3. Calculer E(X) et σ(X).

Solution Application 1 :

1) Calculons le nombre des issues possibles.



L'univers associé à cette expérience aléatoire est l'ensemble des combinaisons de trois boules parmi les neuf boules contenues dans le sac.

Donc le nombre des issues possibles est : $\text{Card}(\Omega) = C_9^3 = 84$

- Calculons la probabilité de l'événement : A " tirer trois boules de même couleur "

L'événement A est réalisé lorsqu'on tire trois boules jaunes ou trois boules rouges.

Donc : $\text{Card}(A) = C_4^3 + C_3^3 = 5$, par suite $p(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{5}{84}$

- Calculons la probabilité de l'événement : B " tirer trois boules portant le même numéro "

L'événement B est réalisé lorsqu'on tire trois boules qui portent le numéro 1 ou trois qui portent le numéro 2.

Donc : $\text{Card}(B) = C_6^3 + C_3^3 = 21$, par suite $p(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{21}{84} = \dfrac{1}{4}$

- Calculons la probabilité de l'événement C " tirer exactement une boule verte ".

L'événement C est réalisé lorsqu'on tire une boule verte et deux boules non vertes.

Donc : $\text{Card}(C) = C_2^1 \times C_7^2 = 42$, par suite $p(C) = \dfrac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{42}{84} = \dfrac{1}{2}$

- Calculons la probabilité de l'événement D " tirer au moins une boule verte ".

L'événement contraire de D est : $\overline{D}$ " aucune boule tirée n'est verte ".

L'événement $\overline{D}$ est réalisé lorsqu'on tire trois boules non vertes.

Donc : $\text{Card}(\overline{D}) = C_7^3 = 35$, par suite $p(\overline{D}) = \dfrac{\text{Card}(\overline{D})}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{35}{84} = \dfrac{5}{12}$

Ainsi : $p(D) = 1 - p(\overline{D}) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

2) • Calculons $p(A \cap B)$:

L'événement $A \cap B$ est réalisé lorsqu'on tire trois boules jaunes portant le numéro 1.

Donc : $\text{Card}(A \cap B) = C_3^3 = 1$, par suite $p(A \cap B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{1}{84}$

• Calculons $p(A \cup B)$:

On sait que : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Donc : $p(A \cup B) = \dfrac{5}{84} + \dfrac{21}{84} - \dfrac{1}{84} = \dfrac{25}{84}$

Solution Application 2 :

1) Calculons le nombre des issues possibles.

L'univers Ω est l'ensemble des arrangements sans répétitions de deux boules parmi les onze boules contenues dans l'urne.

Donc le nombre des issues possibles est $\text{Card}(\Omega) = A_{11}^2 = 110$

• La probabilité de l'événement A est : $p(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{A_7^2}{A_{11}^2} = \dfrac{42}{110} = \dfrac{21}{55}$

• La probabilité de l'événement B est : $p(B) = \dfrac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{A_7^2 + A_4^2}{A_{11}^2} = \dfrac{54}{110} = \dfrac{27}{55}$

• L'événement C est l'événement contraire de B.

Donc la probabilité de l'événement C est : $p(C) = p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - \dfrac{27}{55} = \dfrac{28}{55}$

• La probabilité de l'événement D est : $p(D) = \dfrac{\text{Card}(D)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{A_7^1 \times A_{10}^1}{A_{11}^2} = \dfrac{70}{110} = \dfrac{7}{11}$

• La probabilité de l'événement E est : $p(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{2A_7^1 \times A_4^1 + A_7^2}{A_{11}^2} = \dfrac{98}{110} = \dfrac{49}{55}$

2) L'événement $B \cap E$ est l'événement A, donc : $p(B \cap E) = p(A) = \dfrac{21}{55}$

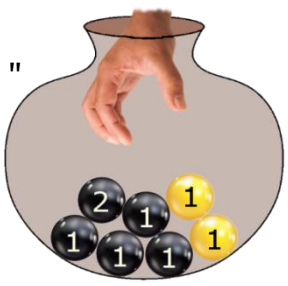
On a : $p(B \cup E) = p(B) + p(E) - p(B \cap E) = \dfrac{27}{55} + \dfrac{49}{55} - \dfrac{21}{55} = 1$

Donc l'événement $B \cup E$ est l'événement certain.

Solution Application 3 :

On a : l'événement C " Tirer deux boules noires ou deux boules jaunes "

Donc : $p(C) = \dfrac{\text{Card}(C)}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{C_5^2 + C_2^2}{C_7^2} = \dfrac{10 + 1}{21} = \dfrac{11}{21}$.



On a : l'événement N : " Tirer deux boules portant le nombre 1"

Donc : $p(\mathrm{N}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{N})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{C_6^2}{C_7^2} = \dfrac{15}{21}$.

On a : l'événement C ∩ N : " Tirer deux boules noires portant le numéro 1 ou deux boules jaunes portant le numéro 1 "

Donc : $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{N}) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{C} \cap \mathrm{N})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{C_4^2 + C_2^2}{C_7^2} = \dfrac{6+1}{21} = \dfrac{1}{3}$.

La probabilité de tirer deux boules de la même couleur sachant qu'elles portent le même numéro, est : $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{C}) = \dfrac{p(\mathrm{C} \cap \mathrm{N})}{p(\mathrm{N})} = \dfrac{7}{21} \div \dfrac{15}{21} = \dfrac{7}{15}$.

La probabilité de tirer deux boules portant le même numéro sachant qu'elles sont de même couleur, est : $p_{\mathrm{C}}(\mathrm{N}) = \dfrac{p(\mathrm{C} \cap \mathrm{N})}{p(\mathrm{C})} = \dfrac{7}{21} \div \dfrac{11}{21} = \dfrac{7}{11}$.

Solution Application 4 :

On note : T l'événement « le client achète un téléviseur »

et M l'événement « le client achète un magnétoscope ».

L'énoncé fournit :

La probabilité pour que l'acheteur achète un téléviseur est $p(\mathrm{T}) = 0{,}6$.

La probabilité pour que l'acheteur achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est $p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = 0{,}3$.

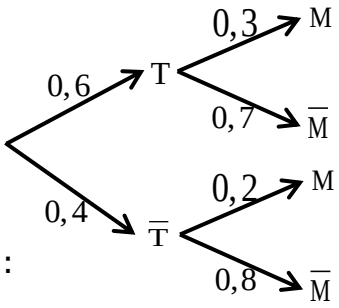
La probabilité pour que l'acheteur achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de téléviseur est $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{M}) = 0{,}2$.

En utilisant la probabilité de l'événement contraire, on a :

$p(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

$p_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{M}}) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

$p_{\overline{\mathrm{T}}}(\overline{\mathrm{M}}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$



ce que l'on peut traduire par l'arbre de probabilités suivant :

1) En appliquant la formule des probabilités composées, la probabilité pour que l'acheteur achète un téléviseur et un magnétoscope est :

$$p(\mathrm{T} \cap \mathrm{M}) = p(\mathrm{T}) \times p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$$

2) En appliquant la formule des probabilités totales, la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope est :

$$p(\mathrm{M}) = p(\mathrm{T}) \times p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) + p(\overline{\mathrm{T}}) \times p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{M}) = 0{,}6 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}26$$

3) On demande de calculer : $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$

$$p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \frac{p(\mathrm{T} \cap \mathrm{M})}{p(\mathrm{M})} = \frac{0{,}18}{0{,}26} \approx 0{,}69$$

Solution Application 7 :

1) La probabilité d'obtenir « Pile » trois fois exactement est :

$$C_7^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{7-3} = 35 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{35}{2^7} \approx 0{,}273$$

2) La probabilité d'obtenir « Pile » cinq fois exactement est :

$$C_7^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{7-5} = 21 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{2^7} \approx 0{,}164$$

Solution Application 8 :

- L'espérance mathématique de X est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{5}{9} \times 1 + \frac{5}{18} \times 2 = \frac{10}{9}$$

- La variance mathématique de X est :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{6} \times \left(0 - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{5}{9} \times \left(1 - \frac{10}{9}\right)^2 + \frac{5}{18} \times \left(2 - \frac{10}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{100}{81} + \frac{5}{9} \times \frac{1}{81} + \frac{5}{18} \times \frac{64}{81} = \frac{35}{81}$$

- L'écart-type de X est :

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} = \sqrt{\frac{35}{81}} = \frac{\sqrt{35}}{9}$$