Prof. Taher Bouyguir

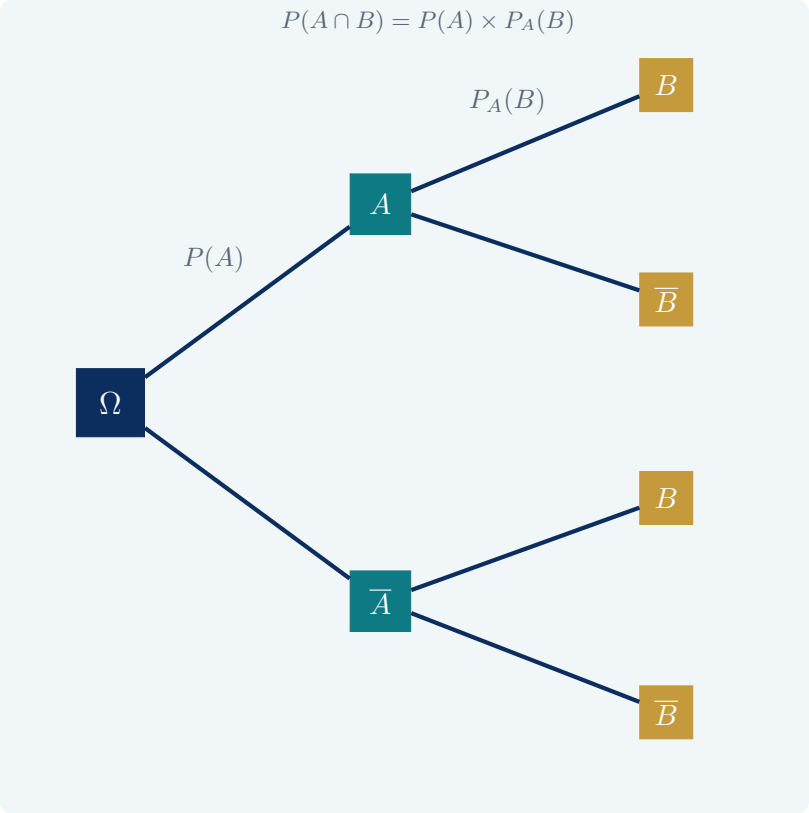
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 3

Probabilités conditionnelles



Cours et corrigés des applications

3
Cours

Probabilités conditionnelles

Capacités attendues (en gras : démonstration à connaître)

- Construire un arbre pondéré ou un tableau.
- Calculer des probabilités conditionnelles.
- Calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Étudier l'indépendance de deux événements (**caractérisation par** $P_A(B) = P(B)$).

Prérequis : vocabulaire des probabilités (univers, issue, événement), intersection $A \cap B$, réunion $A \cup B$, événement contraire $\overline{A}$ avec $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, équiprobabilité, pourcentages.

Table des matières

I Probabilités conditionnelles . . . 3
1 Définition et exemple . . . 3
2 Arbre pondéré . . . 4
3 Tableau croisé . . . 5
II Formule des probabilités totales . . . 6
1 Exemple . . . 6
2 Généralisation . . . 6
III Indépendance . . . 8
Corrigés des applications . . . 11

Dans tout ce chapitre, Ω désigne l'**univers**, c'est-à-dire l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.

I Probabilités conditionnelles

1 Définition et exemple

Définition 1 : probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements de Ω. Si $P(A) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé** le nombre noté $P_A(B)$, défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Remarque

- Cette égalité s'écrit également : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Si $P(B) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Donc on a aussi $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.
- $P_A(B)$ et $P_B(A)$ sont en général **différents** ; et $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$, $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

Exemple

Dans une classe, $60\,\%$ des élèves sont des filles et $12\,\%$ des élèves sont des garçons faisant allemand LVA. On choisit un élève parmi les garçons : quelle est la probabilité qu'il fasse allemand LVA ?
Soit F l'événement « l'élève est une fille » et A l'événement « l'élève fait allemand LVA ». On a : $P(F) = 0{,}6$, donc $P(\overline{F}) = 0{,}4$, et $P(\overline{F} \cap A) = 0{,}12$. Ainsi :

$$P_{\overline{F}}(A) = \frac{P(\overline{F} \cap A)}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}12}{0{,}4} = 0{,}3.$$

Parmi les garçons, $30\,\%$ font allemand LVA.

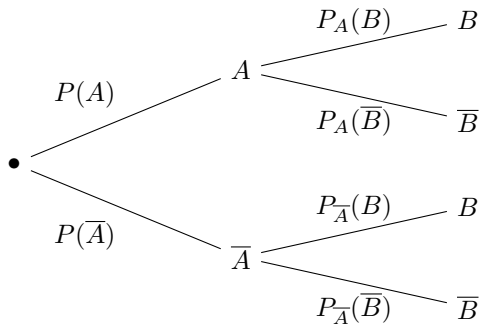
Application 1

Dans un club, $40\,\%$ des adhérents sont mineurs et $10\,\%$ des adhérents sont des mineurs qui pratiquent le tennis. On choisit au hasard un adhérent **mineur**. Quelle est la probabilité qu'il pratique le tennis ?

Ma réponse :

2 Arbre pondéré

Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles, on peut modéliser la situation à l'aide d'un **arbre pondéré**. On envisage deux niveaux de branches : un premier niveau qui indique la probabilité de l'événement A, puis un second niveau qui permet de figurer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement B.



Événement correspondant au chemin :

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

Propriété 1 : règles des arbres pondérés

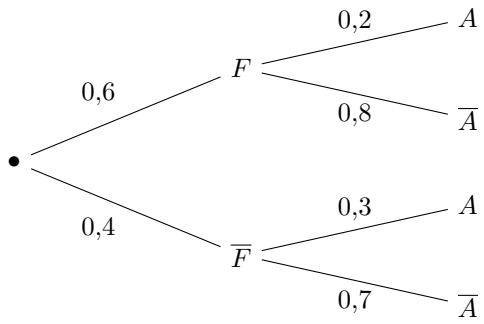
- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités des branches composant ce chemin.

Remarque

La somme des probabilités obtenues en bout de chacun des chemins est elle aussi égale à 1.

Exemple

Dans l'exemple ci-dessus, on sait de plus que parmi les filles, $20\,\%$ font allemand LVA : $P_F(A) = 0{,}2$.
On complète l'arbre pondéré (on a vu que $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}3$) :



$P(F \cap A) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$

$P(F \cap \overline{A}) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$

$P(\overline{F} \cap A) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

$P(\overline{F} \cap \overline{A}) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

Vérification : $0{,}12 + 0{,}48 + 0{,}12 + 0{,}28 = 1$.

Application 2

On reprend le club de l'application 1. On sait de plus que parmi les adhérents majeurs, $30\,\%$ pratiquent le tennis. On note M : « l'adhérent est mineur » et T : « l'adhérent pratique le tennis ».

1. Construire l'arbre pondéré de la situation.
2. Calculer la probabilité que l'adhérent soit majeur et pratique le tennis.

Ma réponse :

3 Tableau croisé

Méthode : probabilités conditionnelles avec un tableau d'effectifs

En situation d'**équiprobabilité**, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Pour $P_A(B)$, on se restreint à la ligne (ou colonne) de A : $P_A(B) = \dfrac{\text{effectif de } A \cap B}{\text{effectif de } A}$.

Exemple

On donne la répartition des licenciés d'un club ; on tire au sort une personne du club.

	Adulte	Enfant	Total
Basket-ball	73	175	248
Handball	45	135	180
Gymnastique	14	86	100
Total	132	396	528

Avec E : « la personne est un enfant » et H : « la personne pratique le handball » :

$$P(E) = \frac{396}{528} = 0{,}75 \qquad P(H) = \frac{180}{528} \qquad P_H(E) = \frac{135}{180} = 0{,}75 \qquad P_E(H) = \frac{135}{396}.$$

II Formule des probabilités totales

1 Exemple

Reprenons notre exemple et cherchons la probabilité que l'élève choisi soit un élève faisant allemand LVA. Un élève faisant allemand LVA peut être soit une fille, et dans ce cas la probabilité est $P(F \cap A) = 0{,}12$, soit un garçon, et dans ce cas la probabilité est $P(\overline{F} \cap A) = 0{,}12$. On en déduit que la probabilité que ce soit un élève faisant allemand LVA est :

$$P(A) = P(F \cap A) + P(\overline{F} \cap A) = 0{,}12 + 0{,}12 = 0{,}24.$$

On peut donc rajouter une règle aux arbres pondérés :

Propriété 2 : troisième règle des arbres

La probabilité d'un événement est la **somme des probabilités des chemins** conduisant à cet événement.

2 Généralisation

Définition 2 : partition

On dit que des événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition** de l'univers Ω si les A_i sont deux à deux disjoints (incompatibles) et si $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Propriété 3 : formule des probabilités totales

Si A_1, A_2, ..., A_n forment une partition de l'univers Ω, alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B),$$

c'est-à-dire, lorsque $P(A_i) \neq 0$ pour tout i :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B).$$

Propriété 4 : cas particulier

Pour tout événement A, A et son événement contraire $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω. Alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B).$$

Méthode : inverser le conditionnement

Pour calculer $P_B(A)$ quand l'arbre donne $P_A(B)$:

1. calculer $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ (un chemin) ;
2. calculer $P(B)$ par la formule des probabilités totales (tous les chemins menant à B) ;
3. conclure : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Exemple

Dans l'exemple de la classe : $P_A(F) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}12}{0{,}24} = 0{,}5$. Parmi les élèves faisant allemand LVA, la moitié sont des filles.

Application 3

On reprend le club des applications 1 et 2.

1. Calculer la probabilité $P(T)$ qu'un adhérent pratique le tennis.
2. Un adhérent pratique le tennis. Quelle est la probabilité qu'il soit mineur ? (valeur exacte puis arrondi au millième)

Ma réponse :

Application 4

Une usine fabrique des pièces avec trois machines : M_1 produit $50\,\%$ des pièces, M_2 $30\,\%$ et M_3 $20\,\%$. Les taux de pièces défectueuses sont respectivement $1\,\%$, $2\,\%$ et $3\,\%$. On prélève une pièce au hasard. Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

Ma réponse :

III Indépendance

Définition 3 : événements indépendants

Soit A et B deux événements de Ω de probabilités non nulles. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété 5

Soit A et B deux événements de Ω de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (ou si et seulement si $P_B(A) = P(A)$).

Démonstration

A et B sont indépendants signifie que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Or, on sait que $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Ainsi :

A et B sont indépendants $\iff P(A) \times P_A(B) = P(A) \times P(B) \iff P_A(B) = P(B)$ car $P(A) \neq 0$.

□

Remarque

L'égalité $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que la réalisation de A **ne modifie pas** la probabilité de l'événement B. Attention : « indépendants » ne veut pas dire « incompatibles » (si $A \cap B = \varnothing$ avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$: des événements incompatibles ne sont pas indépendants).

Exemple

Dans l'exemple de la classe, on sait que $P_F(A) = 0{,}2$ et $P(A) = 0{,}24$: $P_F(A) \neq P(A)$, donc les événements F et A **ne sont pas indépendants**. Le fait que l'élève soit une fille ou un garçon modifie la probabilité que l'élève fasse allemand LVA.

Exemple : le club de sport

On reprend le tableau des licenciés du club (partie I.3). On considère les événements E : « la personne est un enfant », H : « la personne pratique le handball » et G : « la personne pratique la gymnastique ». On constate que :

- $P(E) = \dfrac{396}{528} = 0{,}75$ et $P_H(E) = \dfrac{135}{180} = 0{,}75$: $P(E) = P_H(E)$, donc E et H **sont indépendants** ;
- $P(E) = 0{,}75$ et $P_G(E) = \dfrac{86}{100} = 0{,}86$: $P(E) \neq P_G(E)$, donc E et G **ne sont pas indépendants**.

Propriété 6

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Démonstration

$A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$ forment une partition de A, donc $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A) \times P(\overline{B})$. □

Application 5

1. On donne $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Dans le club des applications précédentes, les événements M et T sont-ils indépendants ?
3. Avec le tableau des licenciés, les événements E et « la personne pratique le basket-ball » sont-ils indépendants ?

Ma réponse :

À retenir

L'essentiel du chapitre

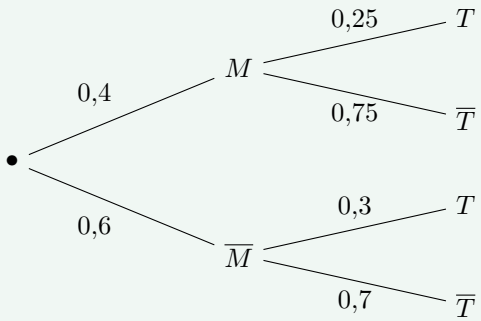
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.
- Arbre : somme des branches d'un nœud $= 1$; probabilité d'un chemin $=$ produit ; probabilité d'un événement $=$ somme des chemins.
- Probabilités totales : $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.
- A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B) \iff P_A(B) = P(B)$.

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

Avec M : « mineur » et T : « tennis » : $P(M) = 0{,}4$ et $P(M \cap T) = 0{,}1$, donc $P_M(T) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

Corrigé de l'application 2



1.

2. $P(\overline{M} \cap T) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.

Corrigé de l'application 3

1. $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}18 = 0{,}1 + 0{,}18 = 0{,}28$.
2. $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}28} = \dfrac{5}{14} \approx 0{,}357$.

Corrigé de l'application 4

M_1, M_2, M_3 forment une partition. Avec D : « la pièce est défectueuse » : $P(D) = 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}02 + 0{,}2 \times 0{,}03 = 0{,}005 + 0{,}006 + 0{,}006 = 0{,}017$.

Corrigé de l'application 5

1. $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$: A et B sont indépendants.
2. $P_M(T) = 0{,}25$ et $P(T) = 0{,}28$: $P_M(T) \neq P(T)$, donc M et T ne sont pas indépendants.
3. Avec B : « basket-ball » : $P_B(E) = \dfrac{175}{248} \approx 0{,}706 \neq 0{,}75 = P(E)$: E et B ne sont pas indépendants.