Le produit scalaire dans le plan

I. Expression analytique du produit scalaire

1. Rappel

a. Formule trigonométrique du produit scalaire

Activité ①

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB = 2$; $BC = 2$; $AC = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

Définition et propriété

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\overrightarrow{\vec{u};\vec{v}})$ tel que $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ est l'angle orienté formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

b. Repère orthonormé direct

Définition

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base du plan, et O un point du plan.

On dit que $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est un repère orthonormé direct si et seulement si $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1u$, $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0$ et $\overrightarrow{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Dans ce que suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

2. Expression analytique du produit scalaire

Introduction

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$

On a $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + x'y\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath} = xx' + yy'$ car $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$ et $\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = 1$.

L'expression $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ est l'expression analytique du produit scalaire.

Propriété ① :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$

On a $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

On a $\vec{u}(-1;3)$ et $\vec{v}(-2;1)$ donc $\vec{u}.\vec{v} = -1 \times (-2) + 3 \times 1 = 5$.

Propriété ②

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + y' = 0$$

Application ①

1) Soient $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$trois vecteurs du plan tels que $\vec{u}(-5,3)$,$\vec{v}\left(\frac{1}{2},-1\right)$et $\vec{w}\left(-2;\frac{1}{3}\right)$

Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{v}.\vec{w}$ et $\vec{u}.\vec{w}$

2) Soient $\vec{u}$et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\vec{u}(2+m;-2)$,$\vec{v}\left(-3;\frac{1}{4}m\right)$. Déterminer la valeur de m pour que $\vec{u}$et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

3. Expression analytique de la distance entre deux points et la norme d'un vecteur.

Propriété

⊕ Soit $\vec{u}$un vecteur du plan tel que $\vec{u}(x,y)$.

On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

⊕Etant donné deux points A et B du plan tels que $A(x_A;y_A)$et $B(x_B;y_B)$.

On a $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Application ②

On considère les points suivants $A(3;2)$, $B\left(\frac{-1}{2};0\right)$et $C(1;-1)$.

1) Calculer les distances suivantes AB, AC et BC .
2) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C .

4. Expression analytique de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et θ la mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

On a $cos\,\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}}$ et $sin\,\theta = \frac{det(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$

Application ③

On considère les points suivants $A(3;3)$, $B(1;1)$et $C(1;3)$.

1) Calculer $cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et $sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$
2) Déduire la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$

Résultats

- *Aire d'un triangle*

L'aire d'un triangle ABC est $S = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\right|(u)$

- *Aire d'un parallélogramme à partir de deux vecteurs*

L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ est $S = |det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$

Application ④

On considère les points suivants : $A(1;1), B(2;2)$ et $C(0;3)$

1) Calculer AC ,BC et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
2) Déduire la nature du triangle ABC
3) Déterminer la surface du triangle ABC

II. La droite dans le plan

1. Vecteur normal à une droite

Définition

Soit (D) une droite du plan et $\vec{u}$ son vecteur directeur.

Tout vecteur non nul et perpendiculaire au vecteur $\vec{u}$ s'appelle vecteur normal à la droite (D).

Propriété :

Soit (D) une droite d'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ est le vecteur directeur de (D)et le vecteur $\vec{n}(a, b)$ le vecteur normal à (D).

Exemple

Donner un vecteur normal à (D) dans les cas suivants

- $(D): 2x + 3y - 5 = 0$: Le vecteur normal à (D) est $\vec{n}(2;3)$.
- $(D): -3x + 5 = 0$: Le vecteur normal à (D) est $\vec{n}(-3;0)$.
- $(D): -2y + 4 = 0$: Le vecteur normal à (D) est $\vec{n}(0;-2)$.

2. Equation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété

Soit (D) une droite du plan, passant par le point $A(x_0, y_0)$et dont le vecteur normal est $\vec{n}(a, b)$.

L'équation cartésienne de la droite (D)est $ax + by + c = 0$ où $c = -ax_0 - by_0$

Application ⑤

1) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D)passant par le point $A(-1;2)$et dont le vecteur normal est $\vec{n}(2;-3)$.
2) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ)la médiatrice du segment $[AB]$ où $A(-1;2)$ et $B(2;-3)$.

3. Parallélisme et orthogonalité de deux droites.

Propriété

Soient (D) et (D') deux droites du plan dont $\vec{n}(a,b)$et $\overrightarrow{n'}(a',b')$sont respectivement les vecteurs normaux à (D) et (D').

- On dit que (D) et (D')sont ***parallèles*** si et seulement si $det(\vec{n},\overrightarrow{n'})=0$.
- On dit que (D) et (D')sont ***orthogonales*** si et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{n'}=0$.

Application ⑥

Etudier la position relative de (D) et (D')dans les cas suivants :

- $(D): 2x+3y-1=0$; $(D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$
- $(D): x+4y+3=0$; $(D'): -\frac{1}{2}x-2y+4=0$
- $(D): 2x+y-1=0$; $(D'): -x+2y+3=0$

4. Distance d'un un point par rapport à une droite

Définition

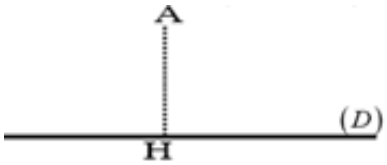
Soit (D) une droite et soient A un point du plan et H le projeté orthogonale de A sur (D).

Le nombre réel AH est appelé **la distance du point** A à la droite (D) et on écrit :$d\big(A,(D)\big)=AH$.

Propriété

Soit(D) une droite d'équation $ax+by+c=0$ et$A(x_0,y_0)$ un point du plan.

La distance du point A par rapport à la droite (D) est :$d\big(A,(D)\big)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Application ⑦

Soit (D) une droite d'équation et soit $A\left(\frac{1}{2};-3\right)$ un point du plan. Déterminer $d\big(A,(D)\big)$

III. Etude analytique d'un cercle

1. Equation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Activité ②

On considère le cercle(C) de centre $\Omega(1;1)$ et de rayon 2.

1) Parmi les points suivants, déterminer ceux qui appartiennent au cercle (C):$A(3;1); B(2;2)$,$C\left(\sqrt{3}+1;2\right)$
2) Soit $M(x;y)$un point du plan
a) Calculer ΩM la distance en fonction de$x$et y
b) Montrer que le point appartient au cercle(C) si seulement si :$(E): x^2+y^2-2x-2y-2=0$
3) En suivant la même démarche de la question 2)b), déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.

Propriété

Soit un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.

Une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $R(R \succ 0)$ est :$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ et on peut écrire : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ avec $c=a^2+b^2-R^2$

Exemple

On considère un cercle (C) de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

$M(x,y)\in(C)\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$

Donc $(x-2)^2+(y+1)^2=\sqrt{2}^2$ Alors $x^2-4x+4+y^2+2y+1=2$

D'où $x^2+y^2-4x+2y+3=0$ est une équation cartésienne du cercle (C).

Application ⑧

1) Déterminer une équation catésienne d'un cercle de centre de centre $\Omega(-2;1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$
2) Déterminer une équation cartésienne d'un cercle passant par le point A et de centre Ω dans les cas suivants

$\otimes\ A(1;3)\ ;\ \Omega(2;-1)$; $\otimes\ A(2;4)\ ;\ \Omega(2;0)$; $\otimes\ A(2;-2)\ ;\ \Omega(-2;3)$

3) Déterminer le centre et le rayon d'un cercle (C) dans les cas suivants

$\oplus\ x^2+y^2-2x+2y-2=0$; $\oplus\ x^2+4x-2y=0$; $\oplus\ x^2+y^2+x-y-\frac{3}{2}=0$

2. *Equation d'un cercle définie par son diamètre*

Propriété :

Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M qui vérifient $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ est un cercle de diamètre $[AB]$ et d'équation $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

Application ⑨

Déterminer une équation cartésienne d'un cercle (C) et de diamètre $[AB]$ où $A(1;-3)$ et $B(2;1)$

3. *Représentation paramétrique d'un cercle*

Définition

$\otimes$ L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan qui vérifient le système $(S)\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\y=b+R\sin\theta\end{cases}/\theta\in\mathbb{R}$ est un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R.

$\otimes$ Le système (S) est appelé une représentation paramétrique d'un cercle.

Exemple

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et de rayon $R=2$.

Le système $(S)\begin{cases} x = -2 + 2\cos\theta \\ y = 5 + 2\sin\theta \end{cases} /\theta \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique du cercle (C).

Application ⑩

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et de rayon $R = 2$.

1)

a) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C).

b) Préciser deux points appartenant au cercle (C).

2) Déterminer une représentation paramétrique d'un cercle définie par l'équation suivante $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$

4. Ensemble de points $M(x,y)$ du plan vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Soient a, b et c des nombres réels et (E) un ensemble de points $M(x,y)$ du plan tel que

$(E) = \{M(x,y)/x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$.

Propriété

Si $a^2 + b^2 - 4c < 0$ alors l'ensemble (E) est un ensemble vide et on écrit $S = \emptyset$.

Si $a^2 + b^2 - 4c < 0$alors l'ensemble(E) est un point qui est $\Omega\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ et on écrit $S = \left\{\Omega\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)\right\}$

Si $a^2 + b^2 - 4c < 0$ alors l'ensemble(E) est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ et on écrit $S = \left\{(C)\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}\right); R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right\}\right\}$.

Application ⑪

Déterminer l'ensemble de points $M(x,y)$ du plan qui vérifie :

- $x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$
- $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$
- $x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$

5. Positions relatives d'une droite et un cercle

Pour étudier la position relative d'un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon$R$ et une droite, il suffit de comparer la distance $d(A,(D))$ et le rayon R.

Propriété

Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon R et soit (D) une droite du plan.

▷ Si $d(\Omega,(D)) > R$alors la droite (D)et le cercle (C) ne se coupent pas.

▷ Si $d(\Omega,(D)) = R$ alors la droite (D)est tangente au cercle (C) (se coupent en un point).

▷ Si $d(\Omega,(D)) < R$ alors la droite (D)et le cercle (C) se coupent en deux points.

Application ⑫

Etudier la position relative du cercle (C)et la droite (D)dans les cas suivants

a. ⊗ $(D): 2x + 3y - 1 = 0$; $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

b. $\otimes$ $(D): x - y + 3 = 0$; $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

6. Equation cartésienne de la tangente d'un cercle en un point

Propriété

Soient (C) un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon R et soit (D) une droite du plan.et soient $A \in (C)$ et $M \in (D)$.

La droite (D)est tangente au cercle (C) en A si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$.

Application ①③

Soit (E) l'ensemble de points $M(x, y)$ du plan qui vérifie $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

1) Montrer que (E)est un cercle (C), en déterminant le centre et le rayon.
2) Vérifier que le point $A(3; 2) \in (C)$.
3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente du cercle (C)en un point A .

Exercice de synthèse

I) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ on considère les points $(-2; 1)$, $B(0; -2)$ et $(1; 3)$

1) Calculer AB , AC ,BC, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) Déduire la nature du triangle ABC
3) Calculer la surface d triangle ABC
4) Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$; $cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$; $sin\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$ et déduire la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$

5) Donner une équation cartésienne de la droite (D), la hauteur du triangle ABC passant par .

6) Calculer la distance $d\big(B, (D)\big)$

II) On considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$.

1)

a) Montrer que $\Omega(1; 2)$ est le centre du cercle (C) et de rayon $R = 2\sqrt{2}$

b) Déterminer une représentation paramétrique du cercle (C)

2)

a) Vérifier que le point $A(-1; 0)$ appartient au cercle (C) .

b) Donner l'équation de la tangente du cercle (C) au point .

3) on considère la droite (D) d'équation $x + y - 3 = 0$.

a) Montrer que la droite (D) coupe le cercle (C) en deux points E et .

b) Déterminer les coordonnés de deux points E et .

c) Déterminer les équations cartésiennes de (D_1) et (D_2) les tangentes au cercle (C) en E et .