Cours 4 : Etude analytique du produit scalaire

I- Expression analytique du produit scalaire dans le plan 1
1) Formule trigonométrique du produit scalaire (Rappel) 1
2) Repère orthonormé direct 1
3) Expression analytique du produit scalaire 2
4) Norme d'un vecteur - distance entre deux points 2
5) Expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ 3
II- Droite dans le plan (Étude analytique) 3
1) Vecteur normal à une droite 3
2) Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal 4
3) Distance d'un point A à une droite (D) 5
III- Étude analytique du cercle dans le plan 5
1) Equation cartésienne d'un cercle 5
1.1- Cercle défini par son centre et son rayon 5
1.2- Cercle défini par un de ses diamètres 6
1.3- Ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 7
2) Représentation paramétrique d'un cercle 7
IV- L'intérieur et l'extérieur d'un cercle 8
V- Positions relatives d'un cercle et d'une droite 9
1) Positions relatives d'un cercle et d'une droite 9
2) Equation de la tangente à un cercle en un de ses points 11

$\vec{u}.\vec{v}$

Etude analytique du produit scalaire

I- Expression analytique du produit scalaire dans le plan

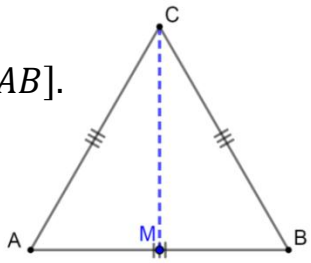
1) Formule trigonométrique du produit scalaire (Rappel)

Activité 1 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 6$ et M le milieu de $[AB]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CM}$.

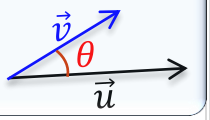


Définition 1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

On appelle ***produit scalaire*** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et définie par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\overrightarrow{\vec{u};\vec{v}})$$



Remarques :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens opposés, alors : $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Propriété 1 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a :

$\vec{u}.\vec{v} = 0$ si, est seulement si : $\left(\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (\overrightarrow{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \right)$.

Définition 2 :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** lorsque : $\vec{u}.\vec{v} = 0$, et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Remarque :

Le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tout vecteur du plan.

2) Repère orthonormé direct

Définition 3 :

Soient O un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.

Le triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère :

- ***orthogonal*** lorsque les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux.
- ***orthonormé*** lorsqu'il est orthogonal et que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.
- ***orthonormé direct*** lorsqu'il est orthonormé et que $(\vec{\imath};\vec{\jmath}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Dans toute la suite de ce cours, on considère que le plan est rapporté à un repère ***orthonormé direct*** $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

3) Expression analytique du produit scalaire

Activité 2 :

Soient $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$ deux vecteurs du plan.

① Montrer que : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

② En déduire que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriété 2 :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs du plan, on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Application 1 :

Soient $\vec{u}(2;1)$, $\vec{v}(-6;4)$ et $\vec{w}(2;3)$ trois vecteurs du plan.

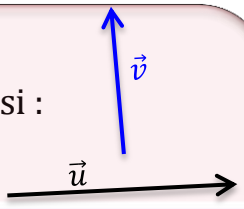
① Calculer $\vec{u}.\vec{v}$, $\vec{u}.\vec{w}$ et $\vec{v}.\vec{w}$.

② Calculer $\vec{u}.\vec{\imath}$ et $\vec{u}.\vec{\jmath}$.

Propriété 3 :

Les vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont orthogonaux si, est seulement si :

$$xx' + yy' = 0$$



Application 2 :

Soient $\vec{u}(2m;3)$ et $\vec{v}(1;2-m)$ deux vecteurs du plan, ou m est un paramètre réel.

Déterminer la valeur de m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

4) Norme d'un vecteur - distance entre deux points

Propriété 4 :

Si $\vec{u}(x;y)$ est un vecteur du plan, alors la norme du vecteur $\vec{u}(x;y)$ est :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété 5 :

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points du plan, alors la distance entre A et B est le nombre réel :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Application 3 :

Considérons les points $A(-3;-1)$, $B(1;1)$ et $C(-5;3)$.

Calculer les distances AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

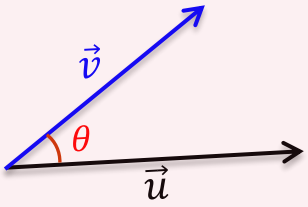
5) Expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Propriété 6 :

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs non nuls du plan et θ une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$. On a :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}}$$

et $$\sin\theta = \frac{det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2} \times \sqrt{x'^2+y'^2}}$$



Application 4 :

Considérons les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(4;5)$.

① Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

② Soit θ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$. Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

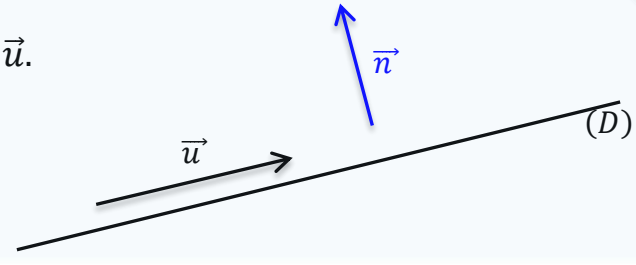
II- Droite dans le plan (Étude analytique)

1) Vecteur normal à une droite

Définition 1 :

Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un ***vecteur normal*** à la droite (D) est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.



Propriété 1 :

Soit (D) une droite d'équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

Le vecteur $\vec{n}(a; b)$ est normal à (D).

Exemple :

Considérons la droite (D) telle que : $(D) : 3x + 7y - 8 = 0$,

On a : $\vec{u}(-7; 3)$ est un vecteur directeur de la droite (D),

et $\vec{n}(3; 7)$ est un vecteur normal à (D).

Application 1 :

Donner un vecteur normal à la droite (D) dans chacun des cas suivants :

$(D) : x - 4y + 3 = 0$; $(D) : 2x - 5 = 0$; $(D) : y + 6 = 0$

Propriété 2 :

Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.

- (D) et (D') sont perpendiculaires si, et seulement si $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.
- (D) et (D') sont parallèles si, et seulement si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires.

2) Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Propriété 3 :

Une équation de la droite (D) passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ est :

$$\boldsymbol{a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0}$$

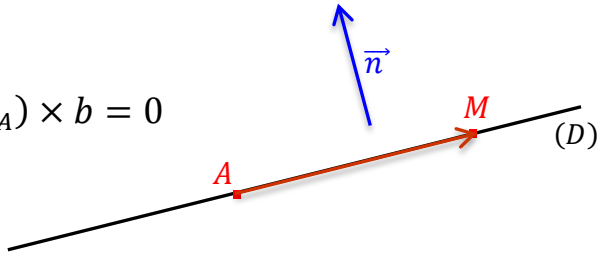
En effet, soit $M(x; y)$ un point du plan, on a :

$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0$

Ainsi : $(D) : a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$



Application 2 :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(-1; 4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(2; 3)$.

Application 3 :

Considérons les points $A(2;1)$ et $B(4;3)$.

Déterminer une équation de la droite (D), médiatrice du segment $[AB]$.

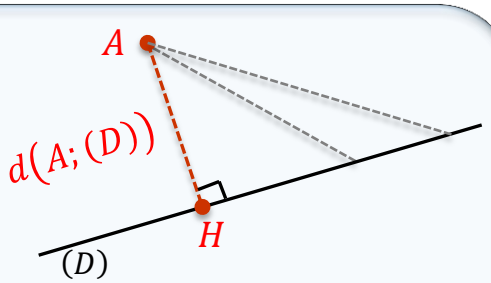
3) Distance d'un point A à une droite (D)

Définition 2 :

Soient A un point du plan et H le projeté orthogonal de A sur une droite (D).

La distance AH, notée $d(A;(D))$, est appelée la distance du point A à la droite (D).

C'est la valeur minimale de la distance AM lorsque M décrit (D).



Propriété 4 :

Soient $A(x_A;y_A)$ un point du plan et (D) une droite d'équation $ax+by+c=0$.

La distance du point A à la droite (D) est :

$$d(A;(D))=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Application 4 :

① Calculer la distance du point $A(0;2)$ à la droite $(D): 4x+3y-7=0$.

② Calculer la distance du point $B(1;1)$ à la droite $(D): 4x+3y-7=0$.

III- Étude analytique du cercle dans le plan

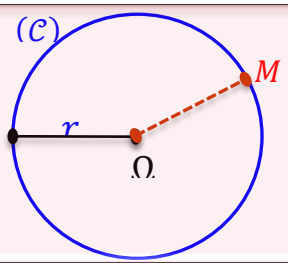
1) Equation cartésienne d'un cercle

1.1- Cercle défini par son centre et son rayon

Propriété 1 :

Soit $\Omega(a;b)$ un point du plan et r un réel positif.

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon r a pour équation cartésienne : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



Démonstration :

Un point $M(x;y)$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r si, et seulement si : $\Omega M=r$, ce qui est équivalent à : $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$.

Exemple 1 :

Le cercle de centre $\Omega(5;-1)$ et de rayon 3, a pour équation : $(x-5)^2+(y+1)^2=9$.

Le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, a pour équation : $x^2+y^2=1$.

Application 1 :

On considère le point $A(3;-5)$ et le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 2.

1. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$.
2. Le point $B(2;5)$ appartient-il au cercle $(\mathcal{C})$?

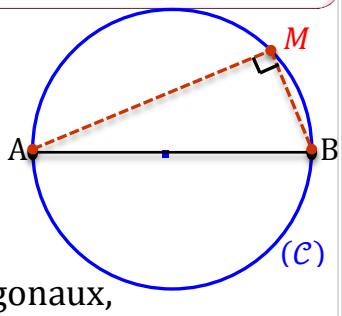
1.2- Cercle défini par un de ses diamètres

Propriété 2 :

Le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

Une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ est :

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$$



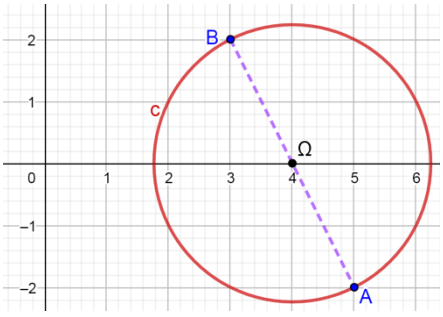
Démonstration :

Le point M appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ si, et seulement si le triangle ABM est rectangle en M, c'est-à-dire si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux, ce qui est équivalent à dire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

On obtient donc une équation de ce cercle en utilisant l'égalité : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$.

Exemple 2 :

Donner une équation du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$ où $A(5;-2)$ et $B(3;2)$.



Solution : On a : $M(x;y)\in(\mathcal{C}) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$

Or : $\overrightarrow{AM}(x-5;y+2)$ et $\overrightarrow{BM}(x-3;y-2)$,

on obtient donc :

$M\in(\mathcal{C}) \iff (x-5).(x-3)+(y-2).(y+2)=0$

$\iff x^2-3x-5x+15+y^2-4=0$

Alors : $x^2+y^2-8x+11=0$ est une équation du cercle $(\mathcal{C})$.

Application 2 :

On considère les points $A(4;-5)$ et $B(2;0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω, et le rayon du cercle $(\mathcal{C})$.

1.3- Ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Exemple 3 :

Déterminons l'ensemble $(\mathcal{E})$, des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient l'équation :

$$x^2+y^2-10x-4y+13=0$$

Solution : En utilisant des formes canoniques, on a :

$$\underbrace{x^2-10x}+\underbrace{y^2-4y}+13=0 \iff \underbrace{x^2-10x+25}+\underbrace{y^2-4y+4}=-13+25+4$$

$$\iff (x-5)^2+(y-4)^2=16$$

Donc l'équation : $x^2+y^2-10x-4y+13=0$ est une équation d'un cercle $(\mathcal{E})$ de centre $\Omega(5;4)$ et de rayon $r=\sqrt{16}=4$.

Application 3 :

Déterminer dans chaque cas, l'ensemble $(\mathcal{E})$, des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient l'équation :

❶ $x^2+y^2-6x+2y+7=0$.

❷ $x^2+y^2+4x-y+\frac{17}{4}=0$.

❸ $9x^2+9y^2-6x-18y=26$.

❹ $x^2+y^2-4x+5=0$.

2) Représentation paramétrique d'un cercle

Propriété et définition :

Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient le système : $(S)\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

Le système (S) est appelé une *représentation paramétrique* du cercle $(\mathcal{C})$.

Exemple 4 :

Une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-5;3)$ et de rayon $\sqrt{2}$ est : $\begin{cases} x=-5+\sqrt{2}\cos\theta \\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$.

Application 4 :

Déterminer l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan qui vérifient le système :

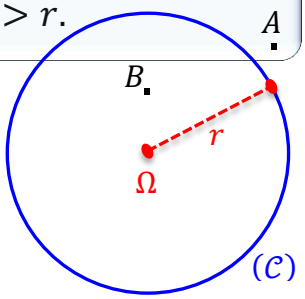
$$(S)\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases} /t \in \mathbb{R}$$

IV- L'intérieur et l'extérieur d'un cercle

Définition :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre Ω et de rayon r avec $r > 0$ et M un point du plan.

- Le point M est ***sur*** le cercle $(\mathcal{C})$ si, et seulement si $\Omega M = r$.
- Le point M est à ***l'intérieur*** du cercle $(\mathcal{C})$ si, et seulement si $\Omega M < r$.
- Le point M est à ***l'extérieur*** du cercle $(\mathcal{C})$ si, et seulement si $\Omega M > r$.



Conséquences :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Pour tout point $M(x_0;y_0)$ du plan, on a :

- M est un point du cercle $(\mathcal{C})$ si, et seulement si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = 0$.
- M est à l'intérieur du cercle $(\mathcal{C})$ si, et seulement si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c < 0$.
- M est à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ si, et seulement si $x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c > 0$.

Application 1 : Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $\Omega(3;-1)$ et de rayon $r = 2$.

Déterminer la position des points $A(1;1)$, $B(5;-1)$ et $C(4;0)$ par rapport au $(\mathcal{C})$.

Exemple 1 : (résolution graphique d'un système d'inéquations)

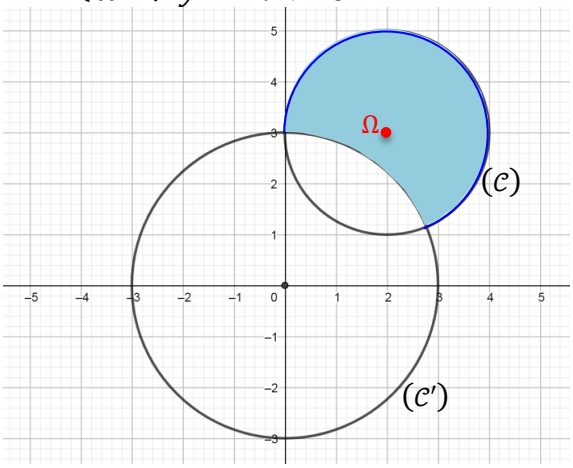
Nous allons résoudre graphiquement le système : $(S)\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 9 > 0 \end{cases}$

- On a : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

  $\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

  Donc $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2;3)$ et de rayon $r = 2$.

- On a : $x^2 + y^2 - 9 = 0$ est l'équation du cercle $(\mathcal{C}')$ de centre $O(0;0)$ et de rayon $r' = 3$.



● L'ensemble des points $M(x;y)$ qui vérifient (S) est l'intérieur de $(\mathcal{C})$ intersection l'extérieur de $(\mathcal{C}')$.

Exemple 2 :

Nous allons résoudre graphiquement le système : $(S)\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-4>0 \\ 2x+3y-6>0 \end{cases}$.

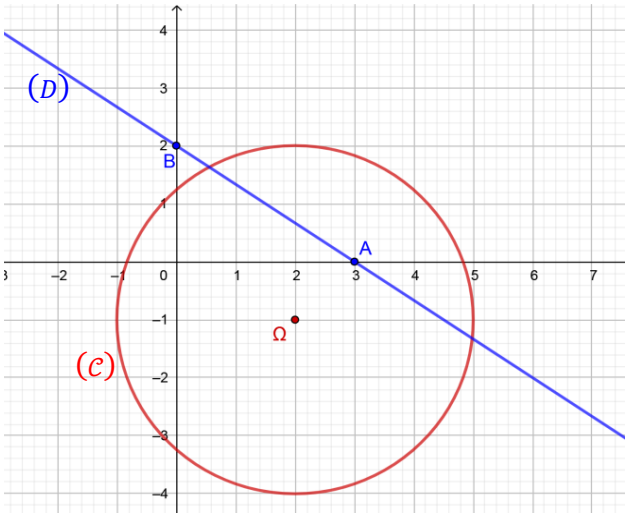
● On a : $x^2+y^2-4x+2y-4>0 \iff (x-2)^2+(y+1)^2>3^2$

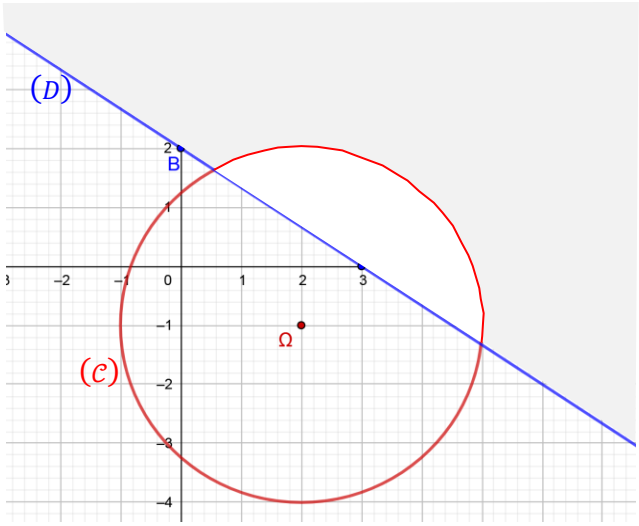
Donc les solutions de cette inéquation sont les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent à l'extérieur du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon $r=3$.

● Les solutions de l'inéquation : $2x+3y-6>0$ sont les couples $(x;y)$ des points qui se trouvent au-dessus de la droite (D) d'équation : $2x+3y-6=0$

(demi plan qui ne contient pas $O(0;0)$, car : $2\times 0+3\times 0-6=-6\leq 0$)

● Finalement l'ensemble des solutions du système (S) sont les couples $(x;y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée en gris.





V- Positions relatives d'un cercle et d'une droite

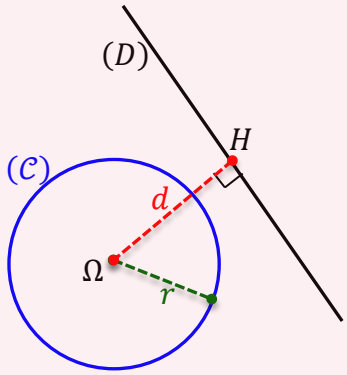
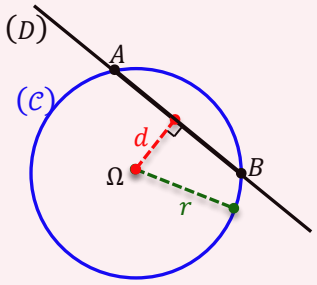
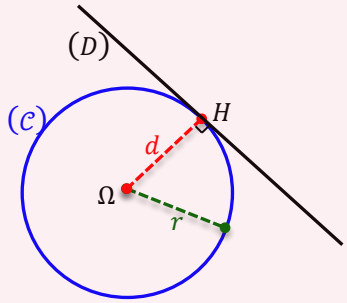
1) Positions relatives d'un cercle et d'une droite

Propriété 1 :

Soit $\mathcal{C}(\Omega;r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan.

Pour étudier les positions relatives du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite (D), il suffit de

déterminer la distance de Ω à (D) et la comparer au rayon r.

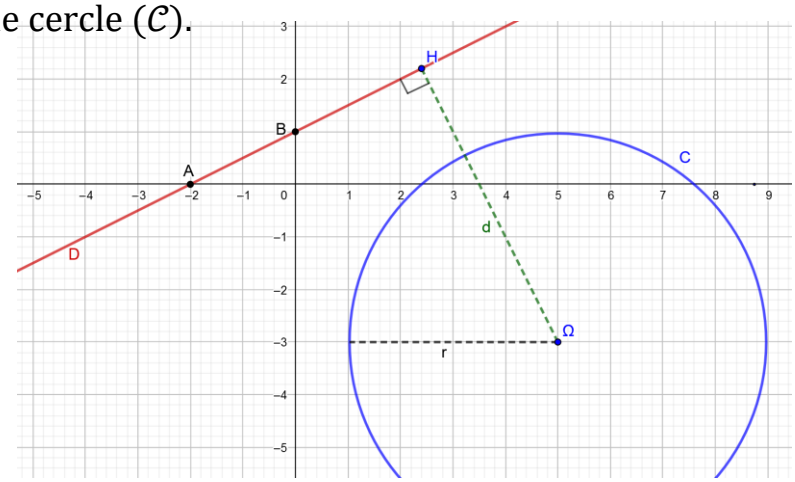
$d(\Omega;(D)) > r$	$d(\Omega;(D)) < r$	$d(\Omega;(D)) = r$
la droite (D) ne coupe pas le cercle $(\mathcal{C})$.	la droite (D) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points distincts.	la droite (D) et le cercle $(\mathcal{C})$ ont un seul point en commun. Ont dit que la droite (D) est tangente au cercle $(\mathcal{C})$.
		
$(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$	$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{A; B\}$	$(\mathcal{C}) \cap (D) = \{H\}$

Exemple 1 :

Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(5;-3)$ et de rayon $r = 4$ avec la droite d'équation $(D) : x - 2y + 2 = 0$.

Solution : On a : $d(\Omega;(D)) = \frac{|5-2\times(-3)+2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}} > r$

Donc : la droite (D) ne coupe pas le cercle $(\mathcal{C})$.



Exemple 2 :

Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(-4;3)$ et de rayon $r = 5$ avec la droite d'équation $(D) : x - 3y + 8 = 0$.

Solution : On a : $d(\Omega;(D)) = \frac{|-4-3\times3+8|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} < r$

Donc : la droite (D) coupe le cercle $(\mathcal{C})$ en deux points distincts A et B.

- Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant : $(S)\begin{cases}(x+4)^2+(y-3)^2=5^2\\ x-3y+8=0\end{cases}$

On a : $x-3y+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=3y-8$

En remplaçant x dans la première équation, on trouve : $(3y-4)^2+(y-3)^2=5^2$

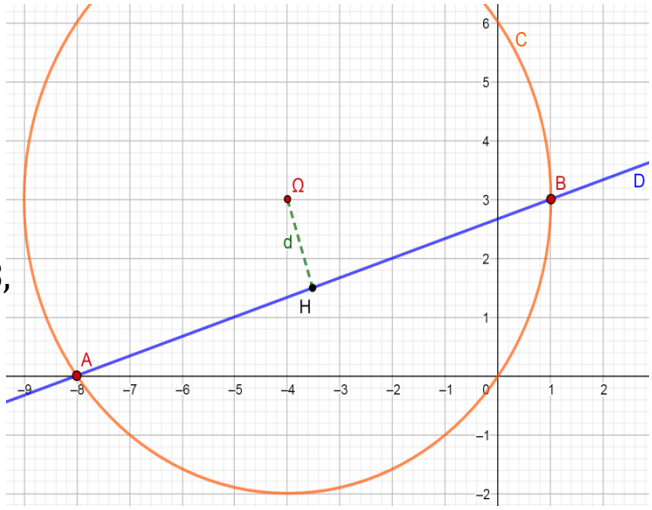
Donc : $10y^2-30y=0$

Donc : $y=0 \quad ou \quad y=3$

En remplaçant y dans l'équation $x=3y-8$, on trouve :

pour $y=0$, on a : $x=3\times 0-8=-8$

et pour $y=3$, on a : $x=3\times 3-8=1$



Donc : les points d'intersections sont : $A(-8;0)$ et $B(1;3)$.

Application 1 :

❶ Etudier la position du cercle $(\mathcal{C})$ de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $r=1$ avec la droite d'équation $(D): y=3$.

❷ Etudier la position du cercle $(\mathcal{C}): x^2+y^2-2x+4y-11=0$, avec la droite d'équation $(D): x+y-3=0$.

2) Equation de la tangente à un cercle en un de ses points

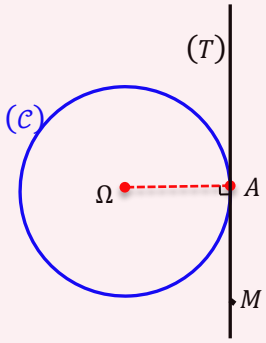
Propriété 2 :

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre $\Omega(a;b)$ et de rayon strictement positif et $A(x_A;y_A)\in(\mathcal{C})$.

La tangente à $(\mathcal{C})$ en A est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0$.

Une équation cette tangente est :

$$(x-x_A)(a-x_A)+(y-y_A)(b-y_A)=0$$



Exemple 3 :

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $x^2+y^2-4x-2y=0$.

❶ Vérifier que : $A(3;-1)\in(\mathcal{C})$.

❷ Déterminer une équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point A.

Solution :

❶ On a : $x_A^2 + y_A^2 - 4x_A - 2y_A = 3^2 + (-1)^2 - 4 \times 3 - 2 \times (-1) = 0$

Donc : $A(3;-1) \in (\mathcal{C})$.

❷ On a : $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \iff x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 1$

$\iff (x-2)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}^2$

Donc $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $\Omega(2;1)$.

Soit (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ en $A(3;-1)$

Donc (T) est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}(2-3;1+1)$.

Donc : $M(x;y) \in (T) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

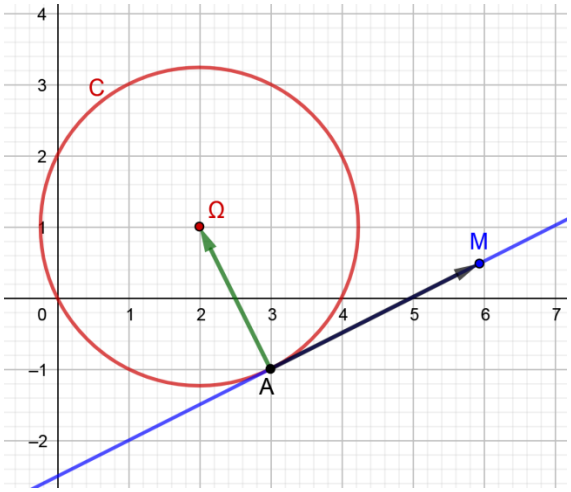
Or : $\overrightarrow{AM}(x-3;y+1)$ et $\overrightarrow{A\Omega}(-1;2)$,

on obtient donc :

$M \in (\mathcal{C}) \iff (x-3) \times (-1) + (y+1) \times 2 = 0$

$\iff -x + 3 + 2y + 2 = 0$

$\iff -x + 2y + 5 = 0$



Donc une équation de la tangente (T) est:

$x - 2y - 5 = 0$

Application 2 :

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle d'équation : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$.

❶ Vérifier que : $A(4;2) \in (\mathcal{C})$.

❷ Déterminer une équation de la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ au point A.