Prof. Taher Bouyguir

Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

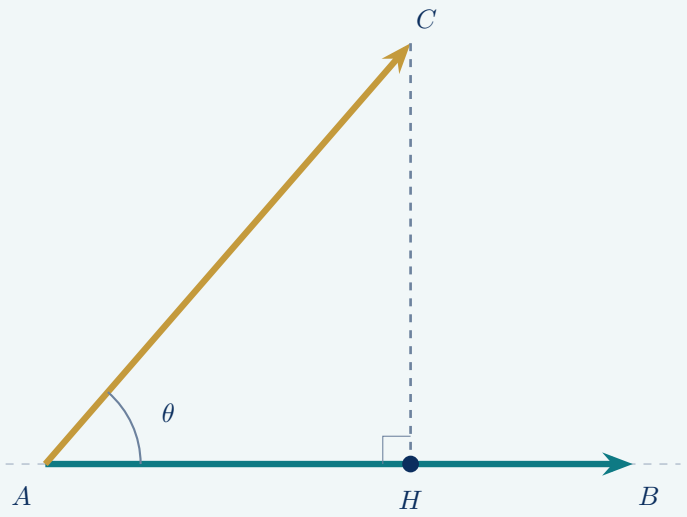
Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 6

Produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\theta = AB \times AH$$



Cours et corrigés des applications

6
Cours

Produit scalaire

Capacités attendues (en gras : à démontrer)

- Connaître et savoir utiliser la définition du produit scalaire avec le cosinus.
- Connaître le produit scalaire de deux vecteurs colinéaires, de deux vecteurs orthogonaux.
- Exprimer le produit scalaire par projection orthogonale, à l'aide des normes, analytiquement.
- **Formule d'Al-Kashi.**
- Déterminer un angle ou une longueur dans un triangle.
- **Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.**

Prérequis : vecteurs et coordonnées, norme d'un vecteur $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ en repère orthonormé, valeurs remarquables de $\cos$ (Chap 2), théorème de Pythagore.

Table des matières

I Définition du produit scalaire . . . 3
1 Norme d'un vecteur . . . 3
2 Définition avec le cosinus . . . 3
3 Vecteurs colinéaires – vecteurs orthogonaux . . . 4
II Produit scalaire et projection orthogonale . . . 5
III Propriétés de calcul – Produit scalaire et normes . . . 6
IV Expression analytique du produit scalaire . . . 7
V Formule d'Al-Kashi – Calculs dans un triangle . . . 8
VI Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ . . . 10
Corrigés des applications . . . 13

I Définition du produit scalaire

1 Norme d'un vecteur

Définition 1 : norme

La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est sa longueur : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = AB$.
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\,(x\,;y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

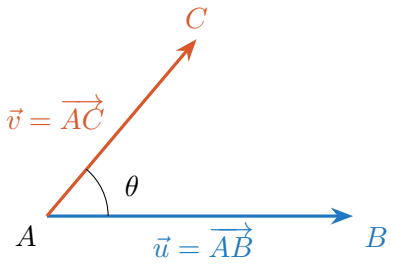
2 Définition avec le cosinus

Définition 2 : produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs **non nuls**. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le **nombre réel**

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
Avec trois points : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.



Remarque

- Le produit scalaire est un **nombre**, pas un vecteur.
- Comme $\cos(-\theta) = \cos\theta$, l'orientation de l'angle n'a pas d'importance : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- Si l'angle est **aigu**, $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$; s'il est **obtus**, $\vec{u}\cdot\vec{v} < 0$; s'il est droit, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

Exemple

- $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60°$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \cos 60° = 4 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 6$.
- ABC équilatéral de côté 2 : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2 \times 2 \times \cos 60° = 2$.
  Pour $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, on place les vecteurs à la même origine : l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ mesure 120°, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 2 \times 2 \times \cos 120° = -2$.

Application 1

1. ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. ABC est un triangle équilatéral de côté 6. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. $ABCD$ est un carré de côté 3. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Ma réponse :

3 Vecteurs colinéaires – vecteurs orthogonaux

Propriété 1 : vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls.

- S'ils sont de **même sens** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (car $\cos 0 = 1$).
- S'ils sont de **sens contraires** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (car $\cos \pi = -1$).

En particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, noté $\vec{u}^2$ (**carré scalaire**), et $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Propriété 2 : vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarque

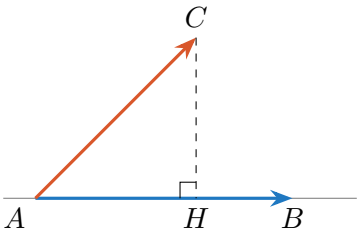
Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur. Pour des vecteurs non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ signifie que $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire que l'angle est droit : les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

II Produit scalaire et projection orthogonale

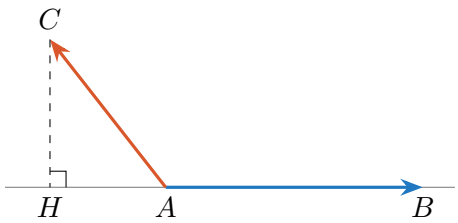
Propriété 3 : projection orthogonale

Soit A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens,} \\ -AB \times AH & \text{s'ils sont de sens contraires.} \end{cases}$$



angle aigu : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$



angle obtus : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

Démonstration

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$ et, en admettant la distributivité (partie III), $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$. Or $\overrightarrow{HC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$. Enfin $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires : on applique la propriété des vecteurs colinéaires. □

Exemple

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 4$. Le projeté orthogonal de C sur (AB) est B, donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = 36.$$

Application 2

$ABCD$ est un carré de côté 4 et I est le milieu de $[CD]$. Calculer à l'aide de projections :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} \quad ; \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} \quad ; \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CI}.$$

Ma réponse :

III Propriétés de calcul – Produit scalaire et normes

Propriété 4 : règles de calcul *(admis)*

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u} \qquad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \qquad (k\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

Conséquences

Identités remarquables : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$; $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

Propriété 5 : produit scalaire et normes

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right).$$

Avec trois points : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

Démonstration

D'après l'identité remarquable, $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$; on isole $\vec{u}\cdot\vec{v}$. De même avec $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.
Pour trois points, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{u}-\vec{v}=\overrightarrow{CB}$. □

Exemple

ABC est un triangle tel que $AB=3$, $AC=5$ et $BC=7$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(9+25-49\right)=-7{,}5.$$

Le produit scalaire est négatif : l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus.

Application 3

1. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
2. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ma réponse :

IV Expression analytique du produit scalaire

Propriété 6 : dans un repère orthonormé

Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u}\,(x\,;y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y')$, alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'}$$

Démonstration

On écrit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Le repère étant orthonormé, $\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1$ et $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = 0$. En développant : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\,\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + (xy' + yx')\,\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + yy'\,\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = xx' + yy'$. □

Exemple

- $\vec{u}\,(2\,;-1)$ et $\vec{v}\,(3\,;4)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-1) \times 4 = 2$.
- $\vec{u}\,(2\,;3)$ et $\vec{w}\,(-6\,;4)$: $\vec{u} \cdot \vec{w} = -12 + 12 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

Méthode : calculer un angle

On calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux façons : analytiquement, et avec la définition. On en déduit

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|},$$

puis l'angle à la calculatrice (touche $\cos^{-1}$ ou Arccos).

Application 4

Dans un repère orthonormé :

1. Les vecteurs $\vec{u}\,(3\,;-2)$ et $\vec{v}\,(4\,;6)$ sont-ils orthogonaux ?
2. Soit $A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$ et $C(2\,;5)$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis une valeur approchée au dixième de degré de l'angle $\widehat{BAC}$.
3. Déterminer le réel m tel que les vecteurs $\vec{a}\,(m\,;2)$ et $\vec{b}\,(3\,;-6)$ soient orthogonaux.

Ma réponse :

V Formule d'Al-Kashi – Calculs dans un triangle

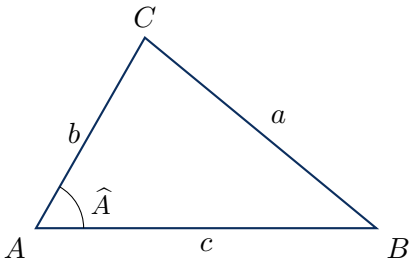
Théorème : formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, avec les notations $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ et $\widehat{A}=\widehat{BAC}$:

$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}}$ c'est-à-dire $BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$.

Démonstration

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, donc $BC^2=\overrightarrow{BC}^{\,2}=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AC^2-2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+AB^2$.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, d'où $BC^2=AB^2+AC^2-2\,AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$. □



Remarque

Si $\widehat{A} = 90°$, alors $\cos \widehat{A} = 0$ et on retrouve le théorème de Pythagore : Al-Kashi le généralise à tous les triangles.

Méthode : longueur ou angle dans un triangle

- **On connaît deux côtés et l'angle compris** : Al-Kashi donne directement le troisième côté.
- **On connaît les trois côtés** : on isole le cosinus, $\cos \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, puis on calcule l'angle.

Exemple

- $b = 5$, $c = 8$, $\widehat{A} = 60°$: $a^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \dfrac{1}{2} = 49$, donc $a = 7$.
- $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$: $\cos \widehat{A} = \dfrac{25 + 9 - 49}{2 \times 5 \times 3} = \dfrac{-15}{30} = -\dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{A} = 120°$.

Application 5

1. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 120°$. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Un triangle a pour côtés 4, 5 et 6. Calculer une valeur approchée au dixième de degré de son plus grand angle.

Ma réponse :

VI Ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Propriété 7 : cercle de diamètre $[AB]$

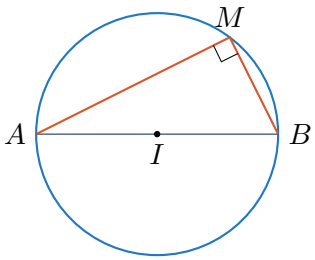
Soit A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$.

Démonstration

Soit I le milieu de $[AB]$; alors $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2.$$

Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \iff MI^2 = IA^2 \iff MI = IA = \dfrac{AB}{2}$: M est sur le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$. □



Remarque

On retrouve une propriété du collège : un triangle AMB est rectangle en M si et seulement si M est sur le cercle de diamètre $[AB]$. La démonstration donne aussi la formule utile : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

Exemple

$A(-1\,;2)$ et $B(3\,;0)$. Le point $C(2\,;3)$ est-il sur le cercle de diamètre $[AB]$?
$\overrightarrow{CA}\,(-3\,;-1)$ et $\overrightarrow{CB}\,(1\,;-3)$: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 + 3 = 0$. Oui, C est sur ce cercle (de centre $I(1\,;1)$ et de rayon $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$).

Application 6

Dans un repère orthonormé, on donne $A(0\,;1)$ et $B(4\,;3)$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. Préciser la nature de $\mathcal{C}$, son centre et son rayon.
2. Les points $O(0\,;0)$ et $E(1\,;4)$ appartiennent-ils à $\mathcal{C}$?

Ma réponse :

Application 7

(Synthèse) Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2\,;0)$, $B(4\,;0)$ et $C(1\,;3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. Retrouver $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ en utilisant le projeté orthogonal H de C sur (AB).
3. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C. Que peut-on dire du point C ?

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 5\times 4\times\cos\dfrac{\pi}{4} = 20\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times 6\times\cos 60° = 36\times\dfrac{1}{2} = 18$.
3. $AC = 3\sqrt{2}$ (diagonale) et $\widehat{BAC} = 45°$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times 3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 9$.
   $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ (sens contraires) : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -3\times 3 = -9$.

Corrigé de l'application 2

- Le projeté de I sur (AB) est le milieu J de $[AB]$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ} = 4\times 2 = 8$.
- Le projeté de I sur (AD) est D : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = 16$.
- $\overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CI} = -\dfrac{1}{2}AB^2 = -8$.

Corrigé de l'application 3

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(6^2-3^2-4^2\right) = \dfrac{1}{2}(36-9-16) = \dfrac{11}{2} = 5{,}5$.
2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right) = \dfrac{1}{2}(16+25-36) = 2{,}5$.

Corrigé de l'application 4

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 4+(-2)\times 6 = 12-12 = 0$: oui, ils sont orthogonaux.
2. $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$, $\overrightarrow{AC}(1\,;3)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3+3 = 6$. $AB = AC = \sqrt{10}$.
   $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{6}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}} = 0{,}6$, donc $\widehat{BAC}\approx 53{,}1°$.
3. $\vec{a}\cdot\vec{b} = 3m-12 = 0 \iff m = 4$.

Corrigé de l'application 5

1. $BC^2 = 16+36-2\times 4\times 6\times\cos 120° = 52-48\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 52+24 = 76$, donc $BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}\approx 8{,}72$.
2. Le plus grand angle est opposé au plus grand côté (6) : $\cos\alpha = \dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\times 4\times 5} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$, donc $\alpha\approx 82{,}8°$.

✔ Corrigé de l'application 6

1. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$: centre $I(2\,;2)$ (milieu), rayon $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{16+4}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$.
2. $\overrightarrow{OA}\,(0\,;1)$, $\overrightarrow{OB}\,(4\,;3)$: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0+3 = 3 \neq 0$: $O \notin \mathcal{C}$.
   $\overrightarrow{EA}\,(-1\,;-3)$, $\overrightarrow{EB}\,(3\,;-1)$: $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB} = -3+3 = 0$: $E \in \mathcal{C}$.

✔ Corrigé de l'application 7

1. $\overrightarrow{AB}\,(6\,;0)$, $\overrightarrow{AC}\,(3\,;3)$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 18$. $AB = 6$, $AC = 3\sqrt{2}$, donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{18}{6\times 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: $\widehat{BAC} = 45°$.
2. $H(1\,;0)$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, $AH = 3$: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 6\times 3 = 18$. ✓
3. $\overrightarrow{CA}\,(-3\,;-3)$, $\overrightarrow{CB}\,(3\,;-3)$: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -9+9 = 0$, donc ABC est rectangle en C.
   C appartient au cercle de diamètre $[AB]$ (centre $(1\,;0)$, rayon 3).