Produit scalaire dans le plan

Remarques

I. Produit scalaire de deux vecteurs

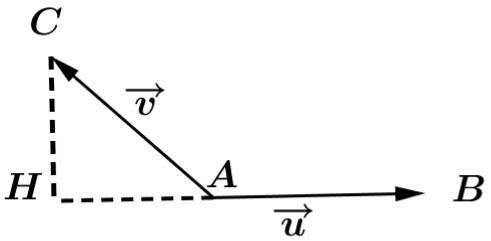
Définition:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A, B et C trois points du plan tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

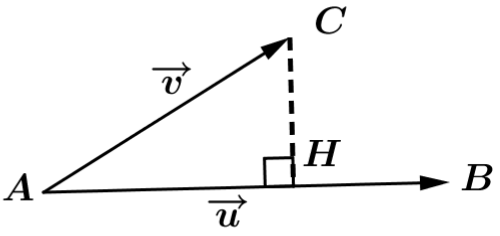
Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Le ***produit scalaire*** des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est le ***nombre réel*** défini comme suit :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, alors : $\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH$.
- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont des sens contraires, alors : $\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH$.



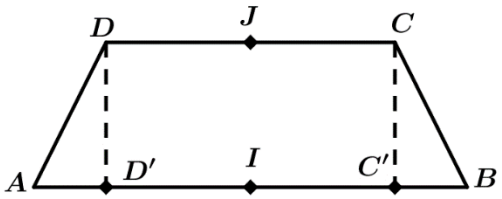
$\vec{u}.\vec{v}=-AB\times AH$



$\vec{u}.\vec{v}=AB\times AH$

Application ①:

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que: $AB=6$ et $CD=5$ et soient I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. (voir la figure).



Calculer les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{ID}$

Propriété: Formule trigonométrique du produit scalaire

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$.
- Soient A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(BAC)$.

Application ②:

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ dans les deux cas suivants :

❶ $\|\vec{u}\|=1,\ \|\vec{v}\|=\sqrt{3},\ et\ \left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

❷ $\|\vec{u}\|=2,\ \|\vec{v}\|=\frac{2}{\sqrt{2}},\ et\ (\vec{u};\vec{v})\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

2) Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=4$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

3) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $BC=6$. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$.

4) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Déterminer les mesures possibles de l'angle orienté $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$ sachant que : $\|\vec{u}\|=4,\ \|\vec{v}\|=\sqrt{2},\ et\ \vec{u}.\vec{v}=-2\sqrt{6}$.

Exercice :

ABC un triangle isocèle en A tels que $AB=3$ et $BC=3\sqrt{3}$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2) En déduire $\widehat{ACB}$ et $\widehat{CAB}$.

II. Propriétés du produit scalaire :

Propriété:

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel. On a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ($\vec{u}^2$ est appelé ***carré scalaire*** de $\vec{u}$)

Application ③:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 3, et\ \left(\overrightarrow{u;v}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

Calculer $\vec{u}.\vec{v}, \vec{u}^2, \vec{v}^2$ et $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\frac{3}{2}\vec{v})$.

Propriété:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(-\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

Application ④:

1) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = 3, et\ \left(\overrightarrow{u;v}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ *et* $(2\vec{u} - 3\vec{v})^2$.

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{2},\ \|\vec{v}\| = 2, et\ \|\vec{u}+\vec{v}\| = 7$.

Calculer : $\vec{u}.\vec{v}$ *et* $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Propriété:

Soient A, B et C trois points du plan, on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$.

Démonstration:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)\end{aligned}$$

Application ⑤:

1) Soient A, B et C trois points du plan tels que : $AB = 1,\ AC = \sqrt{3}$ et $BC = \sqrt{2}$.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}$.

2) Soit ABC un triangle rectangle en A. Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Propriété:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux***, et on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$, si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Application ⑥:

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : $\|\vec{u}\| = 4$, et $\|\vec{v}\| = 5$.

Déterminer le réel m sachant que : $(m\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 13$.

Exercice :

ABC est un triangle $AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$ et $\cos(\hat{A}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2) Considérons D un point du plan défini par : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$.

a)- Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
b)- Conclure.

III. Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

Donc : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Par conséquent : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(BAC)$.

Théorème: Théorème d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle. On a :

- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A})$
- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos(\hat{C})$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos(\hat{B})$

Application ⑦:

1) ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $AC = 5$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$. Calculer BC.

2) MNP est un triangle tel que $MN = \sqrt{3}$, $NP = 2$ et $\hat{N} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer MP.

IV. Théorème de la médiane

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$.

Calculons $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI et AB.

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\,MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

Théorème: théorème de la médiane

Soit ABM un triangle et I le milieu de $[AB]$. On a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

Application ⑧:

ABM un triangle et I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AM]$ et $[BM]$.

Sachant que : $AB = 4$, $AM = 3$ et $BM = 4$, calculer les distances MI, AK et BJ.

Exercice :

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ et $AD = 4$ et $CD = 6$ et soit O le milieu du segment $[AB]$.

1) Calculer les distances BD et AC .

2) Montrer que pour tout point M du plan que $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 18$.

3) En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MB^2 = 24$.

V. Relations métriques dans un triangle rectangle

Propriété:

Soient ABC un triangle et H le projeté orthogonal de A sur (AB) et I le milieu de $[BC]$.

ABC est rectangle en ABC si et seulement si l'une des relations suivantes est vérifiée :

- ✓ $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
- ✓ $AB^2 = BH \times BC$.
- ✓ $AH^2 = HB \times HC$.
- ✓ $AI = \frac{1}{2} BC$.

Application ⑨:

Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et AB=3 , AC=4 .

Calculer les longueurs BC, HC, HB et AH

Exercice de synthèse :

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$ et $AC = 1$ et $\cos(BAC) = \frac{-1}{3}$.

1) Vérifier que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1$.

2) Calculer la distance BC .

3) Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AC]$.

a/- Calculer AI et BJ .

b/- Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$.

4) Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

a/- Ecrire le vecteur $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b/- Montrer que les droites (AB) et (IE) sont perpendiculaires .