Prof : BOUYGUIR Taher
Classe : 1BACSHF

L'étude Des Fonctions

Année scolaire : 2024/2025

Contenue	Remarques

I. *Axe* de symétrie - Centre de symétrie :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative on a :

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f):

si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

- Le point $\Omega(a; b)$ $(a \in \mathbb{R};\ b \in \mathbb{R})$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) :

si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f) : 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f) : f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - x + 2$

Montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) la courbe de.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie par : $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

Montrons que le point $\Omega(1; 2)$ $(a = 1; b = 2)$ est le centre de symétrie de (C_g) la courbe de g.

Remarque :

- Si la droite $(D) : x = a$ est l'axe de symétrie de la courbe de la fonction numérique f, son étude peut sa restriction à l'ensemble $D_f \cap [a; +\infty[$
- Si le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction numérique f, son étude peut sa restriction à l'ensemble $D_f \cap [a; +\infty[$

Exemple :

1- On peut restreindre l'étude de la fonction g definie par $g(x) = \frac{2x}{x-1}$ sur $[1; +\infty[$ car $\Omega(1; 2)$ est un centre de symétrie de la courbe de la fonction g.

2- On peut restreindre l'étude de la fonction f definie par $f(x) = x^2 - x + 2$ sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ car la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe de la fonction f.

II- Étude de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Exemple :

Soit f la fonction définie par :
$f(x) = x^2 - 6x + 5$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

3) calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner
le tableau des variations de la fonction f.
4) Montrer que la fonction f admet une valeur minimale à déterminera.
5) a) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
b) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées.
6) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0.
7) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

❍ ***Solution :***

III- Étude de la fonction : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

❍ ***Exemple :***

Soit f la fonction définie par :
$f(x) = x^3 - 3x + 2$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1) déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3) a) vérifie que :
$(\forall x \in D_f) : f(x) = (x-1)(x^2+x-2)$
b) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses.
4) calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner
le tableau des variations de la fonction f.
5) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 2.
6) calculer : $f(0); f(2)\ et\ f(-1)$
7) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le même repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
8) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) > 4\ et\ f(x) \leq 4$

❍ ***Solution :***

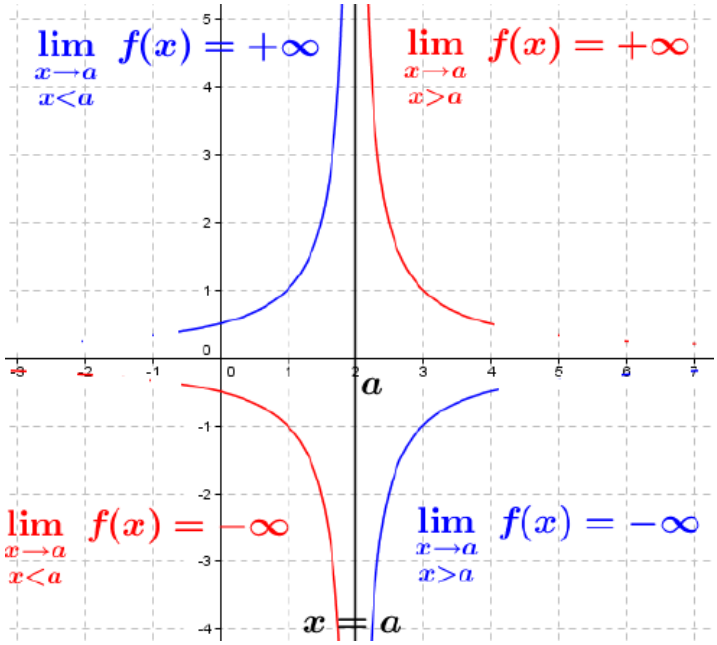
IV- Etude de la fonction $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$

1. L'asymptote verticale :

Propriété :

Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$
Alors on dit que la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

L'interprétation géométrique :



- ***Exemple :***

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$

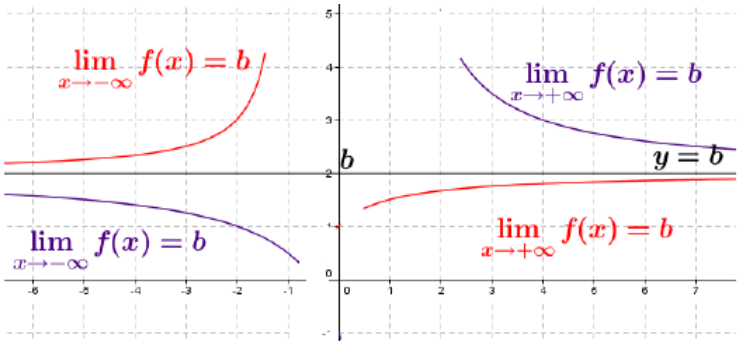
La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f).

2. L'asymptote horizontale :

Propriété :

- Si : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ alors on dit que la droite d'équation : $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) ou voisinage de $+\infty$.
- Si : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ alors on dit que la droite d'équation : $y=b$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) ou voisinage de $-\infty$.

L'interprétation géométrique :



- ***Exemple :***

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{2x}{x-1}$

On a: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) ou voisinge de $+\infty$ et $-\infty$.

- ***Exercice :***

Soit f la fonction définie par :

$f\ (x) = \frac{2x}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ puis déduire les équations des asymptotes de (C_f).

3) calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f et donner le tableau des variations de la fonction f.

5) Déterminer l'équation de (Δ) la tangente à la courbe (C_f) en le point d'abscisse 0.

7) Construire la courbe (C_f) et la tangente (Δ) et les asymptotes dans le même repère $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

❍ ***Solution :***