Prof. Taher Bouyguir

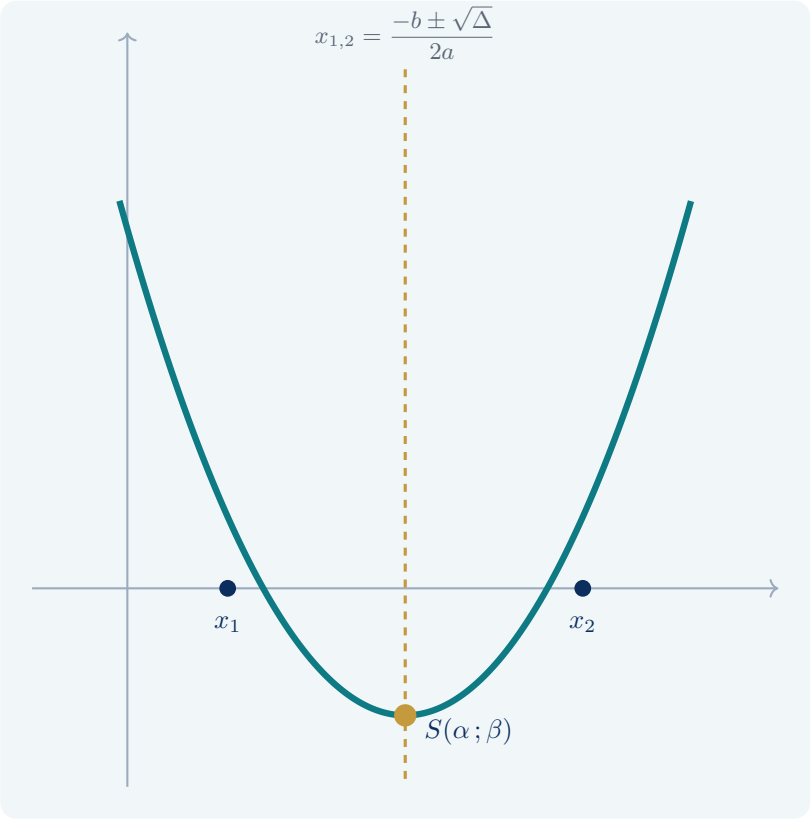
Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

1ère Spé Maths

CHAPITRE 1

Équations du second degré



Cours et corrigés des applications

1
Cours

Équations du second degré

Capacités attendues (en gras : démonstrations à connaître)

- Trouver la forme canonique à l'aide de l'identité $x^2 + 2bx = (x+b)^2 - b^2$.
- Connaître les variations et la courbe d'une fonction polynôme du second degré.
- **Résoudre une équation du second degré.**
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme et leur produit.
- Déterminer les racines en se ramenant à du second degré.
- Résoudre un problème se ramenant à une équation du second degré.

Prérequis : développer, factoriser, identités remarquables, fonction carré (variations), résoudre une équation produit nul.

Table des matières

I Fonction polynôme de degré 2 . . . 3
1 Définition . . . 3
2 Forme canonique . . . 4
3 Variations et représentation graphique . . . 5
II Équation du second degré . . . 7
1 Discriminant . . . 7
2 Résolution de l'équation $f(x) = 0$ . . . 8
3 Somme et produit des racines . . . 10
III Se ramener au second degré – problèmes . . . 12
1 Changement de variable . . . 12
2 Résoudre un problème . . . 13
Corrigés des applications . . . 15

I Fonction polynôme de degré 2

1 Définition

Définition 1 : trinôme

On appelle **fonction polynôme du second degré**, ou **trinôme**, toute fonction f qui peut s'écrire pour tout x de $\mathbb{R}$ sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont des réels, } a \neq 0.$$

a, b et c sont les **coefficients** du polynôme.

Exemple

$f(x) = 2(x-1)(x+3) = 2(x^2+3x-x-3) = 2(x^2+2x-3) = 2x^2+4x-6$.
Il s'agit donc bien d'une fonction polynôme de degré 2 ($a=2$, $b=4$, $c=-6$).

- $2x^2+4x-6$ est la **forme développée** de $f(x)$;
- $2(x-1)(x+3)$ est la **forme factorisée** de $f(x)$.

Application 1

Les fonctions suivantes sont-elles des polynômes du second degré ? Si oui, donner a, b et c.

$$f(x) = (x-2)(3x+1) \qquad g(x) = (x+1)^2 - x^2 \qquad h(x) = 4 - x^2 \qquad k(x) = \frac{1}{x^2} + 1$$

Ma réponse :

2 Forme canonique

Propriété 1

Toute fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \qquad \text{où} \quad \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Cette écriture est appelée **forme canonique** de f.

Démonstration

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on factorise par a puis on utilise $x^2 + 2Bx = (x + B)^2 - B^2$ avec $B = \frac{b}{2a}$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

□

Méthode : forme canonique avec l'identité $x^2 + 2bx = (x + b)^2 - b^2$

1. Factoriser par a les termes en x^2 et en x (si $a \neq 1$).
2. Écrire $x^2 + 2bx$ comme le début du carré $(x + b)^2$, puis retrancher b^2.
3. Développer ce qui reste et réduire.

Exemple

$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x) - 6 = 2\big[(x + 1)^2 - 1\big] - 6 = 2(x + 1)^2 - 2 - 6 = 2(x + 1)^2 - 8.$

Donc $\alpha = -1$ et $\beta = -8$. (Vérification : $\alpha = -\dfrac{4}{2 \times 2} = -1$ et $\beta = f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$.)

Application 2

Déterminer la forme canonique de $f(x) = x^2 - 6x + 11$, puis de $g(x) = 2x^2 + 8x - 1$.

Ma réponse :

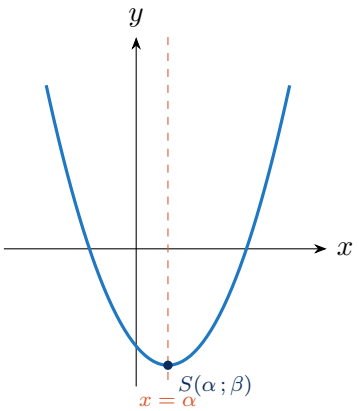
3 Variations et représentation graphique

Théorème

Soit f la fonction polynôme de degré 2 de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, $a \neq 0$.
La représentation graphique de f est la **parabole** $\mathcal{P}$ d'équation $y = a(x-\alpha)^2+\beta$. $\mathcal{P}$ a pour **sommet** le point $S(\alpha\,;\beta)$ et pour **axe de symétrie** la droite d'équation $x = \alpha$.

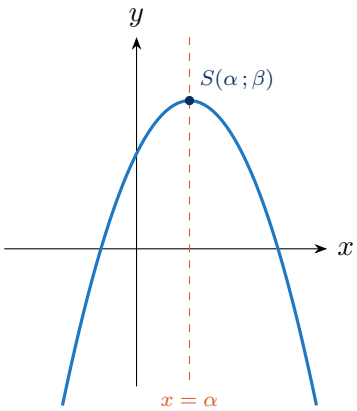
Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	β	↗	



Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	



Remarque

Si $a > 0$, la parabole est « tournée vers le haut » et f admet un **minimum** β atteint en α ; si $a < 0$, elle est « tournée vers le bas » et f admet un **maximum** β atteint en α.

Démonstration

Sens de variation. Démontrons par exemple que, si $a < 0$, la fonction $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$.
On considère des réels x_1 et x_2 de l'intervalle $]-\infty\,;\alpha]$ tels que $x_1 \leqslant x_2$; on a donc $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \alpha$.

- On retranche α à chaque membre : $x_1 - \alpha \leqslant x_2 - \alpha \leqslant 0$; $x_1 - \alpha$ et $x_2 - \alpha$ appartiennent donc à $]-\infty\,;0]$.
- La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$, donc $(x_1-\alpha)^2 \geqslant (x_2-\alpha)^2$.
- On multiplie par le réel négatif a : $a(x_1-\alpha)^2 \leqslant a(x_2-\alpha)^2$.
- On ajoute β : $a(x_1-\alpha)^2 + \beta \leqslant a(x_2-\alpha)^2 + \beta$.

On obtient ainsi $f(x_1) \leqslant f(x_2)$: f est croissante sur $]-\infty\,;\alpha]$. □

À toi !

Démontrer de même que, si $a < 0$, la fonction $f : x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ est **décroissante** sur $[\alpha\,;+\infty[$.

Ma réponse :

Démonstration

Soit x_1 et x_2 dans $[\alpha\,;+\infty[$ avec $x_1 \leqslant x_2$: $0 \leqslant x_1-\alpha \leqslant x_2-\alpha$. La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $(x_1-\alpha)^2 \leqslant (x_2-\alpha)^2$. On multiplie par $a<0$: $a(x_1-\alpha)^2 \geqslant a(x_2-\alpha)^2$, puis on ajoute β : $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Donc f est décroissante sur $[\alpha\,;+\infty[$. Les démonstrations sont analogues si $a>0$. □

À toi !

Axe de symétrie. Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les points de la parabole $\mathcal{P}$ d'abscisses $\alpha-t$ et $\alpha+t$ ont la même ordonnée.

Ma réponse :

Démonstration

$f(\alpha-t) = a(\alpha-t-\alpha)^2+\beta = a(-t)^2+\beta = at^2+\beta$ et $f(\alpha+t) = a(\alpha+t-\alpha)^2+\beta = at^2+\beta$. Donc $f(\alpha-t) = f(\alpha+t)$: deux points symétriques par rapport à la droite $x=\alpha$ ont la même ordonnée ; la droite d'équation $x=\alpha$ est un axe de symétrie de $\mathcal{P}$. □

Exemple

La parabole d'équation $y = 2x^2 + 4x - 6 = 2(x+1)^2 - 8$ a pour sommet $S(-1\,;-8)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -1$. Comme $a = 2 > 0$, f est décroissante sur $]-\infty\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;+\infty[$, et son minimum est -8.

Application 3

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Déterminer sa forme canonique, dresser son tableau de variations et préciser son extremum et l'axe de symétrie de sa courbe.

Ma réponse :

II Équation du second degré

1 Discriminant

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Définition 2 : discriminant

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé **discriminant** du trinôme f.

Pour tout réel x : $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ est une forme canonique de $f(x)$.

2 Résolution de l'équation $f(x) = 0$

Définition 3 : équation du second degré

Une **équation du second degré**, d'inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels donnés, $a \neq 0$.

Théorème

Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ **n'a pas de solution** réelle.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une **unique solution** : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, l'équation a **deux solutions distinctes** : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration

(par disjonction des cas) Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad (\text{car } a \neq 0)$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

- **1er cas** : $\Delta < 0$. Alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$: c'est impossible dans $\mathbb{R}$, car un carré est toujours positif. L'équation n'a pas de solution réelle : $S = \varnothing$.
- **2e cas** : $\Delta = 0$. $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \iff x + \dfrac{b}{2a} = 0 \iff x = -\dfrac{b}{2a}$: $S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- **3e cas** : $\Delta > 0$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \iff x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$$

$$\iff x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(le signe de $|a|$ ne change pas l'ensemble des deux valeurs $\pm$). $S = \left\{\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ ; \ \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$. □

Remarque

- Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont, lorsqu'elles existent, les **abscisses des points d'intersection** de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
- Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont aussi appelées **racines** de f.
- Lorsque $\Delta = 0$, l'unique solution x_0 est appelée **racine double** de f.

Exemple

- $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$: $a = 2$, $b = 4$, $c = -6$. $\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64 > 0$, donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times 2} = -3 \qquad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 2} = 1 \qquad S = \{-3\,;1\}.$$

- $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$: $\Delta = 4^2 - 4 \times 4 \times 1 = 0$, donc une unique solution $x_0 = \dfrac{-4}{2 \times 4} = -\dfrac{1}{2}$: $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
- $h(x) = 3x^2 - x + 5$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 1 - 60 = -59 < 0$: pas de solution réelle, $S = \varnothing$.

Méthode : avant de calculer Δ

Si $b = 0$ ($ax^2 + c = 0$) ou $c = 0$ ($x(ax + b) = 0$), ou si l'on reconnaît une identité remarquable, on résout directement, sans discriminant.

Application 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $x^2 - 2x + 5 = 0$; $9x^2 + 12x + 4 = 0$.

Ma réponse :

3 Somme et produit des racines

Propriété 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des réels, $a \neq 0$. Si f admet les réels x_1 et x_2 pour racines, alors :

la somme des racines est $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et le produit des racines est $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

À toi !

On a $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. Calculer $S = x_1 + x_2$ puis $P = x_1 \times x_2$.

Ma réponse :

Démonstration

$$S = \frac{-b - \sqrt{\Delta} + (-b) + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

(Si $\Delta = 0$, on prend $x_1 = x_2 = x_0$ et les formules restent vraies.) □

Remarque

Si on connaît une racine d'une fonction polynôme du second degré, on peut calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines. On a donc intérêt à repérer, lorsque c'est possible, une racine « **évidente** » parmi les nombres simples comme 1, -1, 2, -2, etc.

Exemple

$k(x) = 2x^2 + 5x - 7$. On remarque que 1 est racine de k : en effet $k(1) = 2 + 5 - 7 = 0$.
La deuxième racine est le réel x_2 tel que $1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{7}{2}$, donc $x_2 = -\dfrac{7}{2}$.

Propriété 3

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont solutions de l'équation du second degré

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Démonstration

Si $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$, alors $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - Sx + P$: x_1 et x_2 sont les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$. Réciproquement, si x_1 et x_2 sont les racines de $x^2 - Sx + P$, la propriété précédente (avec $a = 1$) donne $x_1 + x_2 = S$ et $x_1 x_2 = P$. □

Exemple

On cherche deux réels x_1 et x_2 dont la somme vaut 25 et le produit 144. Ils sont solutions de l'équation $x^2 - 25x + 144 = 0$.

$\Delta = 625 - 576 = 49$, donc $x = \dfrac{25 - 7}{2} = 9$ ou $x = \dfrac{25 + 7}{2} = 16$. Les nombres cherchés sont 9 et 16.

Application 5

1. Vérifier que 1 est racine de $3x^2 + 2x - 5$, puis en déduire l'autre racine sans calculer Δ.
2. Trouver deux réels dont la somme vaut 13 et le produit 40.

Ma réponse :

III Se ramener au second degré – problèmes

1 Changement de variable

Méthode : équation bicarrée $ax^4 + bx^2 + c = 0$

1. Poser $X = x^2$ (avec $X \geqslant 0$) : l'équation devient $aX^2 + bX + c = 0$.
2. Résoudre cette équation du second degré en X.
3. Revenir à x : pour chaque solution $X \geqslant 0$, $x^2 = X \iff x = \sqrt{X}$ ou $x = -\sqrt{X}$; une solution $X < 0$ ne donne rien.

Exemple

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. On pose $X = x^2$: $X^2 - 5X + 4 = 0$, $\Delta = 25 - 16 = 9$, $X = 1$ ou $X = 4$.
$x^2 = 1 \iff x = \pm 1$; $x^2 = 4 \iff x = \pm 2$. $S = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$.

Remarque

On utilise la même idée avec $X = \sqrt{x}$ (pour $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$), ou en multipliant par le dénominateur (pour $x + \frac{2}{x} = 3$, avec $x \neq 0$).

Application 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Ma réponse :

2 Résoudre un problème

Méthode : mettre un problème en équation

1. Choisir l'inconnue x et préciser les valeurs possibles (une longueur est positive, etc.).
2. Traduire l'énoncé par une équation, puis se ramener à $ax^2+bx+c=0$.
3. Résoudre, puis ne garder que les solutions qui ont un sens et répondre par une phrase.

Exemple

Un rectangle a un périmètre de 34 cm et une aire de 60 cm^2. Ses dimensions ℓ et L vérifient $\ell+L=17$ et $\ell L=60$: ce sont les solutions de $x^2-17x+60=0$. $\Delta=289-240=49$, d'où $x=\dfrac{17\pm7}{2}$: le rectangle mesure 5 cm sur 12 cm.

Application 7

Un champ rectangulaire a une longueur qui dépasse sa largeur de 3 m et une aire de 70 m^2. Déterminer ses dimensions.

Ma réponse :

À retenir

L'essentiel du chapitre

- $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$; sommet $S(\alpha\,;\beta)$, axe $x=\alpha$.
- $a>0$: minimum β ; $a<0$: maximum β.
- $\Delta=b^2-4ac$: $\Delta<0$ pas de racine ; $\Delta=0$: $x_0=-\frac{b}{2a}$; $\Delta>0$: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$; deux nombres de somme S et de produit P sont solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

- $f(x) = 3x^2 + x - 6x - 2 = 3x^2 - 5x - 2$: oui, $a = 3$, $b = -5$, $c = -2$.
- $g(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$: non (degré 1).
- $h(x) = -x^2 + 4$: oui, $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$.
- k n'est pas un polynôme (il y a x au dénominateur) : non.

Corrigé de l'application 2

$f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 - 9 + 11 = (x-3)^2 + 2$.
$g(x) = 2(x^2 + 4x) - 1 = 2\big[(x+2)^2 - 4\big] - 1 = 2(x+2)^2 - 9$.

Corrigé de l'application 3

$f(x) = -(x^2 - 4x) + 1 = -\big[(x-2)^2 - 4\big] + 1 = -(x-2)^2 + 5$: $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $a = -1 < 0$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		5	

f admet un maximum égal à 5, atteint en $x = 2$. L'axe de symétrie de la parabole est la droite d'équation $x = 2$.

Corrigé de l'application 4

- $2x^2 - 7x + 3 = 0$: $\Delta = 49 - 24 = 25$, $x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{7+5}{4} = 3$: $S = \left\{\dfrac{1}{2}\,;3\right\}$.
- $x^2 - 2x + 5 = 0$: $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: $S = \varnothing$.
- $9x^2 + 12x + 4 = 0$: $\Delta = 144 - 144 = 0$, $x_0 = -\dfrac{12}{18} = -\dfrac{2}{3}$ (c'est $(3x+2)^2 = 0$) : $S = \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Corrigé de l'application 5

1. $3 + 2 - 5 = 0$: 1 est racine. Produit des racines : $1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = -\dfrac{5}{3}$, donc $x_2 = -\dfrac{5}{3}$.
2. Ils sont solutions de $x^2 - 13x + 40 = 0$: $\Delta = 169 - 160 = 9$, $x = \dfrac{13 \pm 3}{2}$: les nombres sont 5 et 8.

Corrigé de l'application 6

On pose $X = x^2$: $X^2 - 10X + 9 = 0$, $\Delta = 100 - 36 = 64$, $X = \dfrac{10 \pm 8}{2}$, soit $X = 1$ ou $X = 9$.
$x^2 = 1 \iff x = \pm 1$; $x^2 = 9 \iff x = \pm 3$. $S = \{-3\,;-1\,;1\,;3\}$.

Corrigé de l'application 7

Soit $x > 0$ la largeur (en m) ; la longueur est $x + 3$. $x(x+3) = 70 \iff x^2 + 3x - 70 = 0$;
$\Delta = 9 + 280 = 289 = 17^2$.
$x = \dfrac{-3+17}{2} = 7$ ou $x = \dfrac{-3-17}{2} = -10$ (impossible, une longueur est positive). Le champ mesure 7 m sur 10 m.