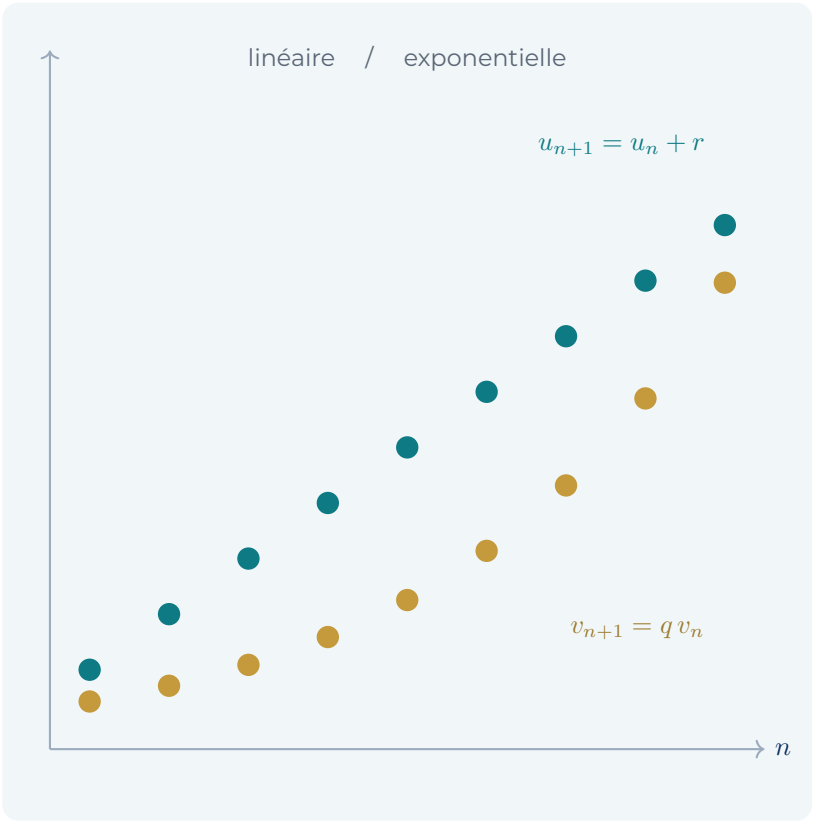
Prof. Taher Bouyguir

Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

CHAPITRE 11

Suites arithmétiques, suites géométriques



Cours et corrigés des applications

1ère Spé Maths

11 Cours

Suites arithmétiques, suites géométriques

Capacités attendues (en gras : à démontrer / à connaître)

- Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique sous plusieurs formes.
- **Calcul du terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.**
- Représentation graphique d'une suite arithmétique ou géométrique (linéaire, exponentielle).
- **Établir et connaître les formules donnant** $1+2+\cdots+n$ **et** $1+q+\cdots+q^n$**.**
- Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique.
- Modéliser une situation à l'aide d'une suite arithmétique ou géométrique.

Prérequis (Chap 9) : notation u_n, relation de récurrence, sens de variation d'une suite. Coefficient multiplicateur : augmenter de $t\,\%$ revient à multiplier par $1+\dfrac{t}{100}$; diminuer de $t\,\%$, par $1-\dfrac{t}{100}$.

Table des matières

I Suites arithmétiques . . . 3
1 Définition . . . 3
2 Terme général . . . 3
3 Sens de variation et représentation graphique . . . 4
II Suites géométriques . . . 5
1 Définition . . . 5
2 Terme général . . . 5
3 Sens de variation et représentation graphique . . . 6
III Sommes de termes consécutifs . . . 7
IV Modéliser avec une suite arithmétique ou géométrique . . . 9
Corrigés des applications . . . 12

I Suites arithmétiques

1 Définition

Définition 1 : suite arithmétique

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est la **raison** de la suite : on passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre.

Méthode : reconnaître une suite arithmétique

On calcule $u_{n+1} - u_n$: si le résultat est une constante r (indépendante de n), la suite est arithmétique de raison r.

Exemple

- $u_n = 3n - 2$: $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$: arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$.
- $v_n = n^2$: $v_{n+1} - v_n = 2n + 1$ dépend de n : (v_n) n'est pas arithmétique.

2 Terme général

Propriété 1 : terme général

Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors pour tous entiers n et p :

$$\boxed{u_n = u_0 + nr} \quad \text{et} \quad u_n = u_p + (n-p)r.$$

Démonstration

On écrit les égalités $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r$, …, $u_n = u_{n-1} + r$ (n égalités) et on les additionne membre à membre : les termes $u_1, \ldots, u_{n-1}$ se simplifient et il reste $u_n = u_0 + nr$. Enfin $u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = (n-p)r$. □

Exemple

- $u_0 = 5$ et $r = -2$: $u_n = 5 - 2n$, donc $u_{20} = 5 - 40 = -35$.
- (u_n) arithmétique avec $u_3 = 10$ et $u_8 = 25$: $u_8 = u_3 + 5r$, donc $5r = 15$, $r = 3$, puis $u_0 = u_3 - 3r = 1$: $u_n = 1 + 3n$.

3 Sens de variation et représentation graphique

Propriété 2 : sens de variation

Soit (u_n) arithmétique de raison r. Si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ; si $r < 0$, elle est strictement décroissante ; si $r = 0$, elle est constante.

Démonstration

$u_{n+1} - u_n = r$: le signe de la différence est celui de r. □

Remarque

Les points $(n\,;u_n)$ d'une suite arithmétique sont **alignés** sur la droite d'équation $y = rx + u_0$: on parle de **croissance (ou décroissance) linéaire**.

Application 1

1. La suite définie par $u_n = 4 - 0{,}5n$ est-elle arithmétique ? Si oui, préciser sa raison et son sens de variation.
2. (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison 4. Exprimer u_n en fonction de n et calculer u_{15}.
3. (w_n) est arithmétique avec $w_5 = 7$ et $w_{12} = -14$. Déterminer la raison, w_0, puis w_n en fonction de n.

Ma réponse :

II Suites géométriques

1 Définition

Définition 2 : suite géométrique

Une suite (v_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que, pour tout entier n :

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

Le réel q est la **raison** : on passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre.

Méthode : reconnaître une suite géométrique

Si les termes ne s'annulent pas, on calcule $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$: si c'est une constante q, la suite est géométrique de raison q.

Exemple

- $v_n = 3 \times 2^n$: $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{3 \times 2^{n+1}}{3 \times 2^n} = 2$: géométrique de raison 2, $v_0 = 3$.
- Un prix de 50 € augmente de 5 % par an : $p_{n+1} = 1{,}05\, p_n$, suite géométrique de raison $1{,}05$.
- Une quantité qui diminue de 20 % par an est multipliée par $0{,}8$: raison $0{,}8$.

2 Terme général

Propriété 3 : terme général

Si (v_n) est géométrique de raison q, alors pour tous entiers n et p :

$$\boxed{v_n = v_0 \times q^n} \quad \text{et} \quad v_n = v_p \times q^{n-p}.$$

Démonstration

$v_1 = qv_0$, $v_2 = qv_1 = q^2 v_0$, … : à chaque étape on multiplie par q. Après n étapes, $v_n = v_0 \times q^n$. De même, en partant de v_p, on multiplie $n - p$ fois par q. □

Exemple

- $v_0 = 3$ et $q = 2$: $v_n = 3 \times 2^n$, donc $v_{10} = 3 \times 1024 = 3072$.
- (v_n) géométrique avec $v_2 = 12$ et $v_5 = 96$: $v_5 = v_2 \times q^3$, donc $q^3 = 8$ et $q = 2$; puis $v_0 = \dfrac{v_2}{q^2} = 3$.

3 Sens de variation et représentation graphique

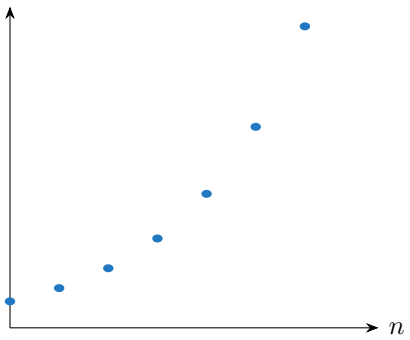
Propriété 4 : sens de variation, avec $v_0 > 0$

Soit (v_n) géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $v_0 > 0$.
- Si $q > 1$, (v_n) est strictement croissante ;
- si $0 < q < 1$, (v_n) est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, (v_n) est constante.

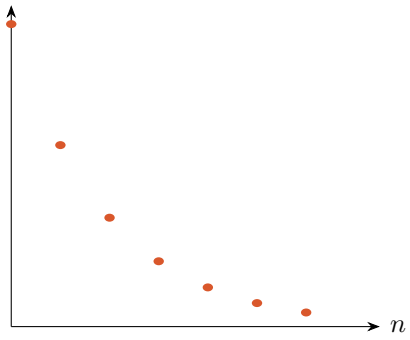
(Si $v_0 < 0$, les sens sont inversés ; si $q < 0$, les termes changent de signe et la suite n'est pas monotone.)

Démonstration

$v_{n+1} - v_n = v_0 q^{n+1} - v_0 q^n = v_0\, q^n (q-1)$. Avec $v_0 > 0$ et $q^n > 0$, le signe est celui de $q - 1$. □



$q = 1{,}5 > 1$: croissance exponentielle



$q = 0{,}6 < 1$: décroissance exponentielle

Application 2

1. La suite $v_n = 2 \times 3^{n+1}$ est-elle géométrique ? Préciser sa raison et v_0.
2. (v_n) est géométrique avec $v_0 = 1000$ et $q = 0{,}9$. Exprimer v_n, calculer v_5 et donner son sens de variation.
3. (w_n) est géométrique de raison positive avec $w_1 = 6$ et $w_3 = 54$. Déterminer q, w_0 et w_n.

Ma réponse :

III Sommes de termes consécutifs

Propriété 5 : somme des premiers entiers

Pour tout entier $n \geqslant 1$: $\boxed{1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}}$

Démonstration

On écrit la somme S deux fois, à l'endroit et à l'envers, et on additionne :

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \ldots & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) \end{array}$$

Il y a n termes égaux à $n+1$: $2S = n(n+1)$, donc $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

Propriété 6 : somme des puissances de q

Pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier n : $\boxed{1+q+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Démonstration

Soit $S = 1+q+\cdots+q^n$. Alors $qS = q+q^2+\cdots+q^{n+1}$. En soustrayant, tous les termes se simplifient sauf deux : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $S(1-q) = 1-q^{n+1}$. Comme $q \neq 1$, on divise par $1-q$. □

Conséquences

- **Suite arithmétique** : somme de termes consécutifs = (nombre de termes) $\times$ $\dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$.
- **Suite géométrique** ($q \neq 1$) : somme = premier terme $\times$ $\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.
- Le nombre de termes de $u_p + \cdots + u_n$ est $n-p+1$.

Exemple

- $1+2+\cdots+100=\dfrac{100\times 101}{2}=5050.$
- $u_n=3n+1$: $u_0+u_1+\cdots+u_{20}$ compte 21 termes, de $u_0=1$ à $u_{20}=61$: somme $=21\times\dfrac{1+61}{2}=651.$
- $1+2+4+\cdots+2^{10}=\dfrac{1-2^{11}}{1-2}=2^{11}-1=2047.$
- $v_n=5\times 3^n$: $v_0+\cdots+v_5=5\times\dfrac{1-3^6}{1-3}=5\times\dfrac{-728}{-2}=1820.$

Application 3

Calculer :

1. $1+2+3+\cdots+50$;
2. $2+5+8+\cdots+302$;
3. $1+3+9+\cdots+3^8$;
4. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^{10}}.$

Ma réponse :

IV Modéliser avec une suite arithmétique ou géométrique

Méthode : choisir le bon modèle

- On **ajoute** (ou retire) chaque fois la même quantité : modèle **arithmétique** (croissance linéaire).
- On augmente (ou diminue) chaque fois du même **pourcentage** : modèle **géométrique** (croissance exponentielle).

Exemple : deux propositions de salaire

Un salarié débute à $2\,000$ € par mois. Contrat A : $+50$ € par an. Contrat B : $+2\,\%$ par an. On note a_n et b_n le salaire mensuel après n années.

- (a_n) est arithmétique de raison 50 : $a_n = 2000 + 50n$, $a_{10} = 2500$.
- (b_n) est géométrique de raison $1{,}02$: $b_n = 2000 \times 1{,}02^n$, $b_{10} \approx 2437{,}99$.
- Total des salaires mensuels de l'année 0 à l'année 10 (11 termes) : $A = 11 \times \dfrac{2000 + 2500}{2} = 24\,750$ et $B = 2000 \times \dfrac{1 - 1{,}02^{11}}{1 - 1{,}02} \approx 24\,337$.

Sur 10 ans, le contrat A est plus intéressant ; mais à long terme, la croissance exponentielle finit toujours par dépasser la croissance linéaire.

Application 4

Une ville compte $15\,000$ habitants en 2025 et sa population diminue de $3\,\%$ par an. On note p_n la population en $2025 + n$.

1. Justifier que (p_n) est géométrique ; exprimer p_n en fonction de n.
2. Estimer la population en 2035.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle année la population sera inférieure à $10\,000$ habitants.

Ma réponse :

Application 5

Dans un théâtre, la première rangée compte 20 fauteuils et chaque rangée compte 2 fauteuils de plus que la précédente. Il y a 25 rangées. Combien de fauteuils compte la dernière rangée ? Combien le théâtre compte-t-il de fauteuils ?

Ma réponse :

Application 6

(Synthèse) Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On pose $v_n = u_n + 1$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Montrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et v_0.
3. En déduire v_n, puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. $u_{n+1} - u_n = -0{,}5$: arithmétique de raison $-0{,}5$ ($u_0 = 4$), strictement décroissante.
2. $u_n = -3 + 4n$; $u_{15} = -3 + 60 = 57$.
3. $w_{12} = w_5 + 7r$: $-14 = 7 + 7r$, donc $r = -3$. $w_0 = w_5 - 5r = 7 + 15 = 22$; $w_n = 22 - 3n$.

Corrigé de l'application 2

1. $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+2}}{2 \times 3^{n+1}} = 3$: géométrique de raison 3, avec $v_0 = 2 \times 3 = 6$.
2. $v_n = 1000 \times 0{,}9^n$; $v_5 = 1000 \times 0{,}59049 = 590{,}49$. $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$: strictement décroissante.
3. $w_3 = w_1 \times q^2$: $q^2 = 9$ et $q > 0$, donc $q = 3$; $w_0 = \dfrac{w_1}{q} = 2$; $w_n = 2 \times 3^n$.

Corrigé de l'application 3

1. $\dfrac{50 \times 51}{2} = 1275$.
2. Arithmétique de raison 3 : $302 = 2 + 3k$ donne $k = 100$, donc 101 termes. Somme $= 101 \times \dfrac{2 + 302}{2} = 15\,352$.
3. $\dfrac{1 - 3^9}{1 - 3} = \dfrac{3^9 - 1}{2} = \dfrac{19682}{2} = 9841$.
4. $\dfrac{1 - (1/2)^{11}}{1 - 1/2} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2048}\right) = 2 - \dfrac{1}{1024} = \dfrac{2047}{1024} \approx 1{,}999$.

Corrigé de l'application 4

1. Diminuer de $3\,\%$ revient à multiplier par $0{,}97$: $p_{n+1} = 0{,}97\,p_n$, géométrique de raison $0{,}97$; $p_n = 15000 \times 0{,}97^n$.
2. $p_{10} = 15000 \times 0{,}97^{10} \approx 11\,061$ habitants.
3. $p_{13} \approx 10\,095$ et $p_{14} \approx 9\,793$: à partir de $2025 + 14 = 2039$.

Corrigé de l'application 5

Le nombre de fauteuils par rangée forme une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 20$ et de raison 2 : $u_{25} = 20 + 24 \times 2 = 68$. Total : $25 \times \dfrac{20 + 68}{2} = 1100$ fauteuils.

Corrigé de l'application 6

1. $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 15$. Différences $2, 4, 8$: non arithmétique. Quotients 3, $\frac{7}{3}$: non géométrique.
2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$: géométrique de raison 2, $v_0 = u_0 + 1 = 2$.
3. $v_n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$, donc $u_n = 2^{n+1} - 1$.
4. $u_0 + \cdots + u_n = (v_0 + \cdots + v_n) - (n+1) = 2 \times \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} - (n+1) = 2^{n+2} - 2 - n - 1 = 2^{n+2} - n - 3$.