Les suites numériques

Niveau :Première année baccalauréat Sciences économiques
Professeur : Taher BOUYGUIR
e-mail : Taher.bouyguir@gmail.com

Table de matière

1. Introduction aux suites **2**

1.1 Les suites numériques . . . 2
1.2 Définir une suite . . . 2
1.2.1 De façon explicite . . . 2
1.2.2 Par récurrence . . . 3
1.3 Les suites majorées - Les suites minorées . . . 3
1.4 Variations de suites . . . 4

2. Suites arithmétiques **6**

2.1 Définition . . . 6
2.2 Comment reconnaitre une suite arithmétique . . . 6
2.3 Terme général d'une suite arithmétique en fonction de n . . . 7
2.4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique . . . 7

3. Suites géométriques **8**

3.1 Définition . . . 8
3.2 Comment reconnaitre une suite géométrique . . . 8
3.3 Terme général d'une suite géométrique . . . 9
3.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique . . . 9

1. Introduction aux suites

1.1 Les suites numériques

Activité

Madame A est embauché au début de l'année 2014. Le responsable des ressources humaines de l'entreprise lui propose un salaire annuel de 80000 dhs.

De plus il est convenu que son salaire augmentera de 250 dhs tous les ans.

On note S_n le salaire obtenu la nième année.

1. a . A quelle année correspond le salaire S_8 ?

   b . Comment sera noté le salaire obtenu la quatrième année ?

   c . Comment sera noté le salaire de l'année 2020 ?

2. a . Calculer S_1,S_2,S_3,...,S_8.

   b . Exprimer S_n en fonction de n.

Définition

Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnée. A un rang donnée n, on associe un nombre réel u_n

$$(u_n) : \quad \mathbb{N} \to R$$
$$n \mapsto u_n$$

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Remarque

Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple

- Soit la suite (u_n) : 1, 6, 11, 16, 21, 26, ...
- Soit la suite (u_n) : 2, 4, 8, 16, 32, ...
- Soit la suite (w_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

1.2 Définir une suite

1.2.1 De façon explicite

Définition

Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n;

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$

Exemple

- Soit la suite (u_n) telle que $u_n = 5n + 1$.
- Soit la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{3n+1}{2n+1}$.
- Soit la suite (w_n) telle que $w_n = n^2 + n + 3$.

1.2.2 Par récurrence

Définition

Lorsque le terme général u_n dépend du terme précédent, on définit alors la suite par une **relation de récurrence** et par le premier terme.

$$u_p \quad et \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

avec u_p est le premier terme de la suite.

Exemple

- Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$
  - $u_1 = f(u_0) = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$
  - $u_2 = f(u_1) = 3u_1 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 13$
  - $u_3 = f(u_2) = 3u_2 + 1 = 3 \times 13 + 1 = 40$

Exercice d'application

Soient les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2-2} \quad et \quad v_n = \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 2} \end{cases}$$

1 Calculer v_1, v_2, v_3, v_4.

2 Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.

3 Qu'il est la condition pour qu'on puissent calculer u_{100} ?

1.3 Les suites majorées - Les suites minorées

Définition

Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$:

- On dit que (u_n) est majorée par M si seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \preceq M$.
- On dit que (u_n) est minorée par m si seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \succeq m$.
- On dit que (u_n) est bornée, si elle est majorée et minorée.

Exemple

☛ Pour toute $n > 0$, On considère la suite $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$.

1 Monter que (u_n) est minorée par 2.

On a $\forall n > 0,\ \frac{1}{n^2} \succ 0$

donc $\forall n > 0,\ 2 + \frac{1}{n^2} \succ 2$.

D'où (u_n) est minorée par 2.

☛ Soit la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + v_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1 Monter que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \succ 1$.

On raisonne par récurrence pour montrer que $v_n \succ 1$ pour toute n dans $\mathbb{N}$.

✔ Pour $n = 0$ on a $v_0 = 2$ donc $v_0 \succ 1$.

✔ Supposons que $v_n \succ 1$.

✔ Montrons que $v_{n+1} \succ 1$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}(v_n + 1) - 1 \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(v_n - 1) \end{aligned}$$

Selon l'hypothèse du récurrence on a $v_n \succ 1$ ce qui veux dire que $v_n - 1 \succ 0$. Donc $\frac{1}{2}(u_n - 1) \succ 0$ Alors $v_{n+1} - 1 \succ 0$, d'où le résultat $v_{n+1} \succ 1$.

Donc d'après le raisonnement par récurrence on a montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \succ 1$

Exercice d'application

1 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

(a) Monter que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \preceq u_n \prec 2$

2 Soit la suite (v_n) définie par :

$$v_n = 3 + \cos(n)$$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ 2 \preceq v_n \preceq 4$

3 Soit la suite (w_n) définie par :

$$\begin{cases} w_0 = \frac{2}{5} \\ w_{n+1} = 5u_n - 2 \end{cases}$$

(a) Monter $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \prec \frac{1}{2}$

1.4 Variations de suites

Définition

Soit une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

- (u_n) est croissante si seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \succeq u_n$
- (u_n) est décroissante si seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \preceq u_n$
- (u_n) est strictement croissante si seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \succ$
- (u_n) est strictement décroissante si seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \prec u_n$

Remarque

✸ Pour déterminer la variation d'une suite, on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$.

✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \succeq 0$, la suite (u_n) est croissante.

✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \preceq 0$, la suite (u_n) est décroissante.

✸ $\forall u_n \succ 0$, on peut aussi calculer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \succ 1$, la suite u_n est croissante.

✔ Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \prec 1$, la suite u_n est décroissante.

Exemple

☛ Montrons que la suite (u_n) définie par : $u_n = 2 + \dfrac{3}{n^2+1}$ est décroissante.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 + \frac{3}{(n+1)^2+1} - 2 - \frac{3}{n^2+1} = \frac{3(n^2+1) - 3((n+1)^2+1))}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} \\ &= \frac{3n^2+3-3(n^2+2n+1+1)}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} = \frac{3n^2+3-3(n^2+2n+2)}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} \\ &= \frac{3n^2+3-3n^2-6n-6}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} = \frac{-6n-3}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} \\ &= \frac{-3(2n+1)}{((n+1)^2+1)(n^2+1)} \end{aligned}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n+1 \succ 0$, alors $-3(2n+1) \prec 0$, et $((n+1)^2+1)(n^2+1) \succ 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n \prec 0$. D'où la suite (u_n) est décroissante.

☛ Étudions la variations que la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1+u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous avons déja montrer dans l'exemple précédent que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \succ 0$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2}(v_n+1) - v_n \\ &= \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} - v_n \\ &= \frac{-1}{2}v_n + \frac{1}{2} \\ &= \frac{-1}{2}(v_n - 1) \end{aligned}$$

Hors nous avons monter que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - 1 \succ 0$. Donc $\dfrac{-1}{2}(v_n - 1) \prec 0$.

Donc (v_n) est décroissante

Exercice d'application

1 Soit que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases}$$

(a) Monter que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \prec u_n \prec 3$.

(b) Monter que (u_n) est strictement croissante.

2 Soit la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$.

(a) Étudier la variation de (v_n).

2. Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition

Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, r étant le raison de la suite.

2.2 Comment reconnaitre une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$, et r un nombre réel.

On dit que (u_n) est une suite arithmétique si, seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.

On note r le raison de la suite.

Exemple

☛ Montrons que la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 3 - (2n+3) \\ &= 2n + 2 + 3 - 2n - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.

☛ Montrons que la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

est arithmétique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= v_n + \frac{1}{2} - v_n \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$

Exercice d'application

Soit les suites (v_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{3} \end{cases} \quad :: \quad v_n = 5 - 3n$$

1 Monter que les suites (v_n) et (u_n) sont deux suites arithmétiques

2.3 Terme général d'une suite arithmétique en fonction de n

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r est de premier terme u_p, le terme général de la suite (u_n) est sous la forme :

$$u_n = u_p + r \times (n - p)$$

Remarque

Si le premier terme est u_0, alors le terme général de la suite (u_n) est de la forme : $u_n = u_0 + r \times n$

Exemple

☛ Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 2n + 3$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1) + 3 - (2n+3) \\ &= 2n + 2 + 3 - 2n - 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

On a déja montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 2, et son premier terme $u_0 = 1$.

Alors sont terme général s'écrit sous forme $u_n = 1 + 2n$

Exercice d'application

Soit les suites (v_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{3} \end{cases} \quad :: \quad v_n = 5 - 3n$$

1 Tu as déja montrer, dans l'exercice précédent, que les suites (v_n) et (u_n) sont arithmétiques.

Maintenant donner le terme général de les suites (v_n) et (u_n) en fonction de n.

2.4 Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et u_p son premier terme.

Et soit la somme $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n$. On a :

$$S_n = (n - p + 1)\left(\frac{u_p + u_n}{2}\right)$$

Remarque

$$S_n = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Premier terme} + \text{Dernier terme}}{2}$$

Exemple

☛ Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = n + 1$.

Calculons la somme $1 + 2 + 3 + ... + 100$.

On a :

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + 100 &= u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{99} \\ &= (99 - 0 + 1) \times \left(\frac{u_0 + u_{99}}{2} \right) \\ &= 100 \times \frac{101}{2} \\ &= 5050 \end{aligned}$$

Exercice d'application

1. calculer $S = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99$.
2. Soit la suite $u_n = 3n + 5$, Calculer la somme : $S = u_4 + u_5 + ... + u_12$

3. Suites géométriques

3.1 Définition

Définition

Une suite géométrique (u_n) est définie par :

- un premier terme u_0 ou u_p
- une relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$, q étant de la raison de la suite (u_n)

3.2 Comment reconnaitre une suite géométrique

Propriété

Une suite est géométrique lorsque le rapport entre deux termes consécutifs est constant.

En d'autre terme : $\forall n \in \mathbb{N}\,, \dfrac{u_{n+1}}{n_n} = q.$

On appel q le raison de la suite (u_n)

Exemple

☛ Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = 3^{n+2}$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{(n+1)+2}}{3^{n+2}} \\ &= \frac{3^{n+3}}{3^{n+2}} \\ &= 3^{n+3-n-2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 9$.

3.3 Terme général d'une suite géométrique

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q est de premier terme u_p, le terme général de la suite (u_n) est sous la forme :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Remarque

Si le premier terme est u_0, alors le terme général de la suite (u_n) est de la forme : $u_n = u_0 \times q^n$

Exemple

☛ Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

- Montrons que (u_n) est une suite géométrique :

  On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3u_n}{u_n} \\ &= 3 \end{aligned}$$

  Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 3.

- Donnons le terme général de la suite (u_n) :

  Puisque (u_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_1 = 2$. Alors le terme général de la suite (u_n) est de la forme :

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 \times 3^{n-1} \\ &= 2 \times 3^{n-1} \end{aligned}$$

3.4 Somme des premiers termes d'une suite géométrique

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p. On :

$$u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Exemple

☛ Calculons la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ... + 1024$.

On a la somme S s'écrit sous la forme : $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$, avec $u_n = 2^n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison 2. Alors :

$$\begin{aligned} S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10} &= u_1 \times \frac{1 - 2^{10-0+1}}{1 - 2} \\ &= 2^{11} - 1 \\ &= 2047 \end{aligned}$$

Exercice d'application

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 1$

1 Monter que (v_n) est une suite géométrique.

2 Exprimer (v_n) en fonction n, puis (u_n) en fonction de n.

3 Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{10}$.

4 Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.