Prof : Bouyguir Taher

Lycée qualifiant Mohamed VI

Cours 5 : Suites numériques

I- Généralités sur les suites numériques 1

1) Définition et vocabulaire 1

2) Modes de génération d'une suite 2

2.1- Suites définies par une formule explicite 2

2.2- Suites définies par récurrence 2

3) Nombre de termes successives d'une suite 3

II- Suite majorée - suite minorée - suite bornée 4

III- Monotonie d'une suite numérique 4

IV- Suites arithmétiques - Suites géométriques 5

1) Suites arithmétiques 5

1.1- Définition d'une suite arithmétique 5

1.2- Expression du terme général en fonction de n 6

1.3- Somme de termes consécutifs 7

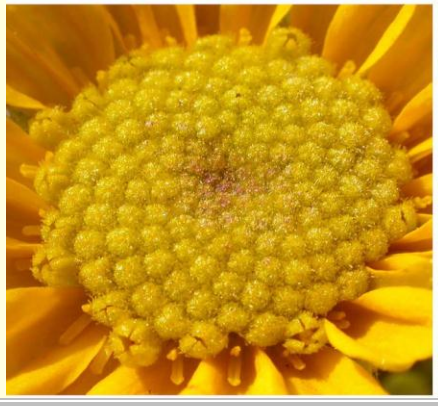
2) Suites géométriques 7

2.1- Définition d'une suite géométrique 7

2.2- Expression du terme général en fonction de n 8

2.3- Somme de termes consécutifs 8





Prof : Bouyguir Taher — Lycée qualifiant Mohamed VI

Suites numériques

I- Généralités sur les suites numériques

1) Définition et vocabulaire

Activité 1 : Chacune des listes suivantes de nombres obéit à une loi. Découvrir cette loi et donner les deux termes suivants.

a) $7\ ;\ 4\ ;\ 1\ ;\ -2\ ;\ -5\ ;\ \cdots$ *b)* $\frac{1}{4}\ ;\ 1\ ;\ \frac{7}{4}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ \frac{13}{4}\ ;\ \cdots$

c) $0\ ;\ 3\ ;\ 8\ ;\ 15\ ;\ 24\ ;\ \cdots$ *d)* $1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ \cdots$

Activité 2 : On considère l'ensemble des carrés des entiers naturels rangés dans l'ordre croissant : $0\ ;\ 1\ ;\ 4\ ;\ 9\ ;\ \cdots$ de sorte que le premier terme soit 0, le deuxième terme soit 1 et ainsi de suite.

1) Déterminer le troisième et le quatrième terme.

2) On pose : $u_0 = 0;\ u_1 = 1;\ u_2 = 2^2 = 4;\ u_3 = 3^2 = 9.$

a) Déterminer u_7 et u_{10}.

b) Exprimer alors u_n en fonction de n.

c) Exprimer en fonction de n, les entiers : $u_{2n};\ u_{n+1}$ et u_{3n+1}.

Activité 3 : On considère l'ensemble des inverses des entiers naturels non nuls rangés dans l'ordre décroissant : $1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ \cdots$ de sorte que le premier terme soit 1, le deuxième terme soit $\frac{1}{2}$ et ainsi de suite.

1) Déterminer le troisième et le huitième terme.

2) On pose $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n.

a) Déterminer $u_5;\ u_6$ et u_{100}.

b) Exprimer en fonction de n les réels : $u_{2n};\ u_{n+1}$ et u_{3n+1}.

Définition 1 :

- Une ***suite numérique*** est une fonction u de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle le ***terme général*** de la suite ou ***terme d'indice n***.
- Le ***terme initial*** de la suite c'est-à-dire le premier terme de la suite est le terme de rang 0 et est noté u_0.
- La suite est notée u, ou plus souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n).

Remarques :

- On peut aussi définir une suite à partir d'un certain rang n_0 plus grand que 0, on note alors la suite par $(u_n)_{n\geq n_0}$.
- Si u_1 est le premier terme d'une suite, alors u_n est le terme de rang n.
- Si u_0 est le premier terme d'une suite, alors u_n est le terme de rang $(n+1)$.

Exemples :

- La suite $\begin{array}{l} u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad n \longmapsto 2n+1 \end{array}$ est une suite numérique.

  C'est la suite des nombres impairs : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... ; $2n+1$; ...

- Les premiers termes de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (n+1)^2$ sont :

  $v_0 = 1$; $v_1 = 4$; $v_2 = 9$; $v_3 = 16$; $v_4 = 25$.

- Les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\geq 4}$ définie pour tout $n \geq 4$ par : $w_n = \frac{n+1}{n^2-9}$

  sont : $w_4 = 1$; $w_5 = \frac{3}{8}$; $w_6 = \frac{7}{27}$; $w_7 = \frac{1}{5}$.

2) Modes de génération d'une suite

Il existe plusieurs manières de définir une suite numérique.

2.1- Suites définies par une formule explicite

- Une suite (u_n) est définie de façon explicite si le terme général u_n s'exprime en fonction de n.
- On peut définir une suite numérique (u_n) à l'aide d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ en posant, pour tout entier n : $u_n = f(n)$.

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = 5n-1$ correspond à la suite des valeurs d'une fonction car : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 5x-1$.

  On a : $u_0 = f(0) = -1$; $u_1 = f(1) = 4$; $u_2 = f(2) = 9$; $u_{60} = f(60) = 299$.

- La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par $v_n = \frac{2n+3}{n-1}$ correspond à la suite des valeurs d'une fonction, car $v_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.

  On a : $v_2 = f(2) = 7$; $v_3 = f(3) = \frac{9}{2}$; $v_{100} = f(100) = \frac{203}{99}$.

2.2- Suites définies par récurrence

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- La donnée de u_0 et de la relation : " pour tout $n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$ " définissent une suite numérique (u_n).
- La suite (u_n) est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.
- On peut calculer de proche en proche tous les termes de la suite (u_n), à condition de connaître le premier terme de la suite.
- Une telle suite est dite ***récurrente***.

Exemples :

- La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 5u_n - 1 \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$, est une suite récurrente, et on a :

$u_1 = 5u_0 - 1 = -5 - 1 = -6$; $u_2 = 5u_1 - 1 = -30 - 1 = -31$;

$u_3 = 5u_2 - 1 = -155 - 1 = -156$; $u_4 = 5u_3 - 1 = -780 - 1 = -781$

- La suite (F_n) définie par $\begin{cases} F_0 = 1 \; ; \; F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$, est une suite récurrente.

Ses premiers termes sont : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; ...

C'est une suite où les deux premiers termes sont égaux à 1 et chacun des autres termes est égal à la somme des deux termes précédents.

Application 1 : Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \frac{2^n - 1}{2n}$ pour tout $n \geq 1$.

① Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

② Exprimer u_{n+1} et u_{3n} en fonction de n.

Application 2 : Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 1 + \sqrt{v_n} \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$.

Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Application 3 : Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1+w_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

① Calculer w_1, w_2 et w_3.

② Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$: $w_n = \frac{2}{2n+1}$.

3) Nombre de termes successives d'une suite

Propriété :

Soit (u_n) une suite numérique et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

Le nombre de termes successives u_p; u_{p+1}; ⋯ et u_n est : $\boldsymbol{n - p + 1}$.

Application 4 : Déterminer le nombre de termes de chacune des sommes suivantes:

$A = u_7 + u_8 + u_9 + \cdots + u_{100}$ $B = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$C = 3 + 4 + 5 + \cdots + 99$ $D = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$

$E = \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{150}$ $F = 1 + 3 + 5 + \cdots + 97$

II- Suite majorée - suite minorée - suite bornée

Définition : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombres réels où n_0 est un entier naturel.

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***majorée*** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_n \leq M}$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***minorée*** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_n \geq m}$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée.

Application 1 : On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \frac{n}{n+1}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 \leq u_n < 1$.

Application 2 : On considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{1}{2-v_n} \end{cases}$.

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 0 \leq u_n \leq 1$.

III- Monotonie d'une suite numérique

Définition : Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombre réels où n_0 est un entier naturel.

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***croissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***décroissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***strictement croissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_{n+1} > u_n}$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***strictement décroissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_{n+1} < u_n}$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***constante*** si : $(\forall n \geq n_0) : \boldsymbol{u_{n+1} = u_n}$.
- Une suite ***monotone*** est une suite croissante ou une suite décroissante.
- Une suite ***strictement monotone*** est une suite strictement croissante ou une suite strictement décroissante.

On utilise plusieurs méthodes pour étudier les variations d'une suite :

➢ **Etude du signe de la différence de deux termes consécutifs.**

Dans tous les cas, on peut calculer la différence $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ et étudier son signe.

⇨ Si cette différence est toujours positive, la suite est croissante.

⇨ Si cette différence est toujours négative, la suite est décroissante.

➢ **Comparaison du quotient de deux termes consécutifs et de 1.**

Uniquement dans le cas où on sait que tous les termes de la suite sont strictement positifs, on peut calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

➪ Si ce quotient est toujours plus grand que 1, la suite est croissante.

➪ Si ce quotient est toujours plus petit que 1, la suite est décroissante.

➢ **Par récurrence.**

Utiliser le raisonnement par récurrence.

➢ **Etude des variations d'une fonction.**

Uniquement dans le cas où la suite (u_n) est définie par une relation $\boldsymbol{u_n = f(n)}$, où f est une fonction monotone sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Alors la suite (u_n) est aussi monotone et a le même sens de variation que f.

Application 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n}{2^n}$.

1) Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) Retrouver le résultat précédant en utilisant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Application 2 : On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$.

Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

Propriété :

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

IV- Suites arithmétiques - Suites géométriques

1) Suites arithmétiques

1.1- Définition d'une suite arithmétique

Activité 1 :

Un capital C est placé à un intérêt simple au taux annuel de t%, s'il augmente chaque année d'une somme constante égale à t% de C.

Un capital de 10 000 Dhs est placé à un intérêt simple, au taux annuel de 3 %.

1) Calculer l'intérêt I en Dhs rapporté par ce capital en une année.

2) On pose : $c_0 = 10\,000$ Dhs, et on désigne par c_n la somme en Dhs disponible au bout de n années ($n \in \mathbb{N}$).

a) Calculer c_1; c_2; c_3 et c_4.

b) Comment peut-on obtenir c_5 à partir de c_4 ?

c) Trouver une relation entre c_{n+1} et c_n.

Définition 1 :

- Une suite (u_n) est ***arithmétique*** s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, on ait : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
- Le nombre r est une constante réelle appelée ***raison*** de la suite arithmétique.

Remarques :

- Le réel r ne dépend pas de n.
- Les suites arithmétiques sont caractérisées par le fait que la différence de deux termes consécutifs est constante.

Exemples

- La suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = -4 \\ \forall n \in \mathbb{N} : \ v_{n+1} = v_n + 3 \end{cases}$ est arithmétique de premier terme -4 et de raison 3.
- La suite des naturels est arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
- La suite des naturels impairs est arithmétique de premier terme 1 et de raison 2.

Application 1 :

1) Soit la suite arithmétique : 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; .....

a) Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.

b) Trouver trois autres termes de cette suite.

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 7 - 4n$.

a) Calculer u_0; u_1 et u_2.

b) Montrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = (n+1)^2$.

a) Calculer v_0; v_1 et v_2.

b) La suite (v_n) est-elle arithmétique ?

1.2- Expression du terme général en fonction de n

Propriété 1 :

Le terme général u_n d'une suite arithmétique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$
- Si le premier terme est u_p, alors : $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p).r}$

Application 2 :

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$, telle que : $u_{20} = 7$ et $u_{36} = 15$.

Déterminer la raison r et le premier terme u_0 de la suite (u_n).

1.3- Somme de termes consécutifs

Propriété 2 :

Soit (u_n) une suite arithmétique et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

La somme de termes consécutifs $u_p; u_{p+1}; \cdots$ et u_n est égale à :

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1).\frac{u_p + u_n}{2}$$

C'est à dire, la somme S_n de termes consécutifs d'une suite arithmétique vérifie :

$$S_n = \text{Nombre de termes} \times \frac{\text{Somme des termes extrêmes}}{2}$$

Cas particuliers :

- $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1).(u_0 + u_n)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n.(u_1 + u_n)}{2}$

Application 3 : Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 7 + 3n$.

1) Calculer la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.

2) Calculer la somme : $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

3) Calculer la somme : $22 + 25 + 28 + \cdots + 3007$.

Application 4 :

1) Montrer que la somme des n premiers naturels vérifie :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

2) Déterminer la somme des n premiers nombres impairs.

2) Suites géométriques

2.1- Définition d'une suite géométrique

Activité 2

Un intérêt annuel de t% est dit composé, si à la fin de chaque année il est capitalisé (c'est-à-dire ajouté au capital) et produit lui-même un intérêt de t% pendant l'année suivante.

1) Une personne a obtenu un prêt de 5 000 Dhs à intérêts composés au taux annuel de 10%.

a) Si cette personne décide de rembourser après une année, quelle somme devrait-elle rendre ?

b) Si cette personne décide de rembourser après deux ans, quelle somme devrait-elle rendre ?

2) Soit un capital c_0 placé à intérêts composés au taux annuel de 6 %.

On désigne par c_n le capital disponible au bout de n années.

a) Exprimer c_1 à l'aide de c_0.

b) Exprimer c_2 à l'aide de c_1 puis à l'aide de c_0.

c) Exprimer c_3 à l'aide de c_2 puis à l'aide de c_0.

d) Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n.

Définition 2 :

- Une suite (u_n) est ***géométrique*** s'il existe un réel q non nul tel que pour tout naturel n, on ait : $\boldsymbol{u_{n+1} = q.u_n}$.
- Le nombre q est une constante réelle appelée ***raison*** de la suite géométrique.

Remarques :

- Le réel q ne dépend pas de n.
- Les suites géométriques sont caractérisées par le fait que le quotient de deux termes consécutifs est constant (dans le cas où les termes de la suite sont non nuls).
- Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
  - ✓ Si $q = 0$ alors la suite est nulle à partir de son deuxième terme.
  - ✓ Si $q = 1$ alors la suite est constante (tous les termes sont égaux au premier terme).
  - ✓ Si $u_0 = 0$ alors la suite est nulle.

Exemples :

- La suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ est géométrique de premier terme 5 et de raison 2.
- La suite des puissances successives de 5 est géométrique de premier terme 1 et de raison 5.

Application 5 :

1) Soit la suite géométrique : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; ...

a) Déterminer la raison de cette suite.

b) On note : $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$. Déterminer u_2; u_5 et u_8.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

a) Calculer v_0; v_1 et v_2.

b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

3) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = n^2$.

a) Calculer w_0; w_1 et w_2.

b) La suite (w_n) est-elle géométrique ?

2.2- Expression du terme général en fonction de n

Propriété 3 :

Le terme général u_n d'une suite géométrique s'exprime en fonction de n de la façon suivante :

- Si le premier terme est u_0, alors : $u_n = q^n . u_0$
- Si le premier terme est u_p, alors : $\boldsymbol{u_n = q^{n-p} . u_p}$

Application 6 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On donne : $u_7 = 4374$ et $u_5 = 486$.

Trouver la raison q et le premier terme u_0 et u_{10} sachant que la raison est positive.

2.3- Somme de termes consécutifs

Propriété 4 :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et p un entier naturel tel que $p \leq n$.

La somme de termes consécutifs $u_p; u_{p+1}; \cdots$ et u_n est égale à :

$$\sum_{k=p}^{k=n} \boldsymbol{u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p . \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}}$$

C'est à dire, la somme S_n de termes consécutifs d'une suite géométrique vérifie :

$$\boldsymbol{S_n = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{Nombre\ de\ termes}}{1 - raison}}$$

Cas particuliers :

- $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
- $\sum_{k=1}^{k=n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 . \frac{1-q^{n}}{1-q}$

Remarque :

- Si $q = 1$, alors : $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n - p + 1).u_p$.

Application 7 : Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3 \times 2^n$.

1) Calculer la somme : $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.
2) Calculer la somme : $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ en fonction de n.
3) Calculer la somme : $24 + 48 + 96 + \cdots + 768 + 1536$.

Application 8 :

1) Montrer que la somme des $(n + 1)$ premières puissances de 2 vérifie :

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

2) Montrer que la somme des n premières puissances de q, avec $q \neq 1$, vérifie :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Résumé : Le tableau suivant résume les principaux résultats concernant les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Nature de la suite	(u_n) *suite* ***arithmétique*** *de raison* r	(u_n) *suite* ***géométrique*** *de raison* q
Relation de récurrence	$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$	$\boldsymbol{u_{n+1} = q.u_n}$
Relation entre deux termes	$\boldsymbol{u_n = u_p + (n - p).r}$	$\boldsymbol{u_n = u_p . q^{n-p}}$
Somme de termes consécutifs : $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n =$	$\boldsymbol{(n - p + 1).\frac{u_p + u_n}{2}}$	$\boldsymbol{u_p . \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$ *si* $q \neq 1$