Prof : BOUYGUIR Taher

Classe : 1BACSHF

Les suites numériques

Année scolaire : 2024/2025

Contenue	Remarques

I. Généralité :

1. Définition :

Définition :

Soit I une partie de $\mathbb{N}$.
Une suite numérique u est une fonction de I dans $\mathbb{R}$.
On note l'image d'un nombre n par u_n et on note la suite u par $(u_n)_{n\in I}$.

Exemple ① :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 3n + 1$.

- u_0 =----------
- u_3 =----------
- u_7 =----------

Exemple ② :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}.$$

- u_1 =----------
- u_2 =----------
- u_3 =----------

2. Nombre de termes consécutifs d'une suite :

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.
Le nombre des termes consécutifs $u_p, u_{p+1}, \ldots, u_n$ tel que $(p \prec n)$ est : $n - p + 1$.

Exemple :

Le nombre des termes consécutifs de u_4 à u_{44} est :
$44 - 4 + 1 = 41$.

II. Suite arithmétique :

1. Définition :

Définition :

Soient (u_n) une suite numérique et r un nombre réel.
On dit que (u_n) est une suite ***arithmétique*** si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} - u_n = r$.

- Le nombre r est appelé **la raison** de la suite (u_n).

Exemple ①:

Vérifions si la suite (u_n) définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 2n + 3$ est arithmétique.

❍ ***Exemple ②:***

Vérifions si que la suite (u_n) définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = -\frac{3}{2}n + 1$ est arithmétique.

❍ ***Exemple ③:***

Vérifions si la suite (u_n) définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 2^n$ est arithmétique.

---

2. Terme général d'une suite arithmétique :

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p .
Le terme général de la suite (u_n) est :

$$(\forall n \in I): u_n = u_p + (n-p) \times r.$$

❍ ***Remarque :***

Si le premier terme d'une suite arithmétique est u_0, alors le terme général de la suite (u_n) est :

$$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = u_0 + n \times r$$

❍ ***Exemple ①:***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ telle que $u_2 = 4$.
Déterminons le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❍ ***Exemple ②:***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique tel que $u_0 = -2$ et $u_4 = 7$.
Déterminons la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

3. Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique et soit la somme : $S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$.
On a : $S = (n-p+1) \times \left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$.

❍ ***Exemple :***

Soit (u_n) une suite arithmétique tel que $u_1 = -1$ et $u_{10} = 28$.
On a : $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$

= ----------

= ----------

= ----------

✍ Application :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 4n + 15$$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est une suite arithmétique.

2) Est-ce-que 2021 est un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3) Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{20}$.

III. Suite géométrique

1. Définition :

Définition :

Soient (u_n) une suite numérique et q un nombre réel.
On dit que (u_n) est une suite **géométrique** si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} = qu_n$.

- Le nombre q est appelé **la raison** de la suite (u_n).

Exemple ①:

Vérifions si la suite (u_n) définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 2^n$ est géométrique.

Exemple ②:

Vérifions si que la suite (u_n) définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = 4 \times 3^{2n+1}$ est géométrique.

Exemple ③:

Vérifions si que la suite (u_n) définie par :
$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n; n \in \mathbb{N} \end{cases}$ est géométrique.

---

2. Terme général d'une suite géométrique :

Propriété :

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p .
Le terme général de la suite (u_n) est :

$$(\forall n \in I): u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Remarque :

Si le premier terme d'une suite géométrique est u_0, alors le terme général de la suite (u_n) est :

$$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q = 2$ tel que $u_1 = 4$.
Déterminons le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

3. La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q tel que $q \neq 1$ et soit la somme $S = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n$.

On a : $S = u_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

Application :

Soit (v_n) une suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}): v_n = \frac{3^n}{2}$.

1) Calculer v_0 et v_8.

2) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

3) Calculer : $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_8$.

Résumé

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = qU_n$
Terme général	$U_n = U_p + (n-p)r$ $(p \leq n)$	$U_n = U_p \times q^{(n-p)}$ $(p \leq n)$
Somme de termes successives	$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(U_p + U_n)$	$S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \frac{(1-q^{(n-p+1)})}{1-q}$
a, b et c trois termes successives	$2b = a + c$	$b^2 = ac$

Exercice ①:

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r = 3$ telle que $u_0 = \frac{1}{2}$.

1) Calculer u_1 et u_{10}.
2) Ecrire u_n en fonction de n.
3) Vérifier que $\frac{301}{2}$ est un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{50}$

Exercice ②:

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par :
$(\forall n \in \mathbb{N}): u_n = -3 \times 2^n$.

1) Calculer u_0 et u_{10}.
2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique en déterminant sa raison.
3) Calculer la somme suivante : $S = u_0 + u_1 \ldots + u_{10}$