Les suites numériques

I. Généralités sur les suites numériques

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et I une partie de $\mathbb{N}$ tel que $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$.

1. Définition d'une suite

On appelle suite numérique toute fonction définie sur I $(I \subset \mathbb{N})$ se note $U, V \ldots$

2. Vocabulaire

Soit U une suite numérique définie sur I $(I \subset \mathbb{N})$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre $U(n)$ se note U_n .
- La suite U se note $(U_n)_{n \in I}$ ou $(U_n)_{n \geq n_0}$.
- Le nombre U_n s'appelle terme générale de la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$.
- Le nombre U_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$.

Exemple

- Le terme général de la suite des nombres pairs est $U_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et son premier terme est $U_0 = 2 \times 0 = 0$
- Le terme général de la suite des nombres impairs est $U_n = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et son premier terme est $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$

Application ①

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite numérique définie par $U_n = \frac{2+5n}{n}$

1) Calculer les trois premiers termes de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$
2) Calculer $U_n + 1$, U_{n+1} et U_{2n+1}
3) Déterminer la valeur de n (rang) telle que $U_n = \frac{7}{2}$

Remarque

Il existe deux types des suites :

- ✓ **Suite définie explicitement en fonction de rang n**

Ce type permet de déterminer directement les termes de la suite ; en remplaçant n par des valeurs possibles.

Exemple

La $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $U_n = 2n + 3$: est une suite définie explicitement Telle que $U_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$; $U_7 = 2 \times 7 + 3 = 17$.....

- ✓ **Suite définie par une relation de récurrence**

Cette suite peut être définie par son premier terme (ou par ses premiers termes) ; et par une relation de récurrence permettant de calculer chaque terme en fonction des termes précédents.

Exemple

- La suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ est une suite définie par une relation de récurrence.

  On a $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = \frac{1}{2} \times 1 + 3 = \frac{7}{2}$; $U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 3 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + 3 = \frac{7}{4} + 3 = \frac{19}{4}$

- La suite définie par $\begin{cases} V_1 = 1 \\ V_{n+2} = \sqrt{2V_{n+1} + 3} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ est une suite définie par une relation de récurrence.

On a $V_2 = \sqrt{2V_1 + 3} = \sqrt{2 \times 1 + 3} = \sqrt{5}$

Application ②

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite numérique définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n + 1} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

Calculer U_1 , U_2 et U_3

II. Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

Activité

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite numérique définie par $U_n = \frac{2+n}{1+n}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3
2) Montrer que $1 \leq U_n \leq 2$

Définitions

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique.

• On dit que la suite $(U_n)_{n\in I}$est **majorée** par un nombre réel M si et seulement si $(\forall n \in I); U_n \leq M$

•On dit que la suite $(U_n)_{n\in I}$est **minorée** par un nombre réel m si et seulement si $(\forall n \in I); U_n \geq m$.

•On dit que la suite $(U_n)_{n\in I}$est **bornée** s'elle est majorée et minorée.

Application ③

Soit $(U_n)_n$une suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{2}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3} \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3
2) En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que(U_n)est majorée par 1 et minorée par 0.

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique.

$(U_n)_{n\in I}$est bornée $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* / |U_n| \leq k$

Exemple

$U_n = 2\,cos(n) + sin(n)\ (\forall n \in \mathbb{N})$

On a $(\forall n \in \mathbb{N})\ ; |U_n| \leq 3$ donc (U_n)est bornée.

III. Monotonie d'une suite numérique

Définition

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique.

* On dit $(U_n)_{n\in I}$est une suite ***croissante*** si et seulement si $n \prec m \Rightarrow U_n \leq U_m\ (\forall m \in I)(\forall n \in I)$.
* On dit $(U_n)_{n\in I}$est une suite ***décroissante*** si et seulement si $n \prec m \Rightarrow U_n \geq U_m\ (\forall m \in I)(\forall n \in I)$.
* On dit $(U_n)_{n\in I}$est une suite ***constante*** si et seulement si $n \prec m \Rightarrow U_n = U_m\ (\forall m \in I)(\forall n \in I)$

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique.

* On dit $(U_n)_{n\in I}$est une suite ***croissante*** si et seulement si $(\forall n \in I)\ ; U_n \leq U_{n+1}$.
* On dit $(U_n)_{n\in I}$est une suite ***décroissante*** si et seulement si $(\forall n \in I)\ ; U_n \geq U_{n+1}$.
* On dit $(U_n)_{n\in I}$est une suite ***constante*** si et seulement si $(\forall n \in I)\ ; U_n = U_{n+1}$.

Remarque

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique telle que $(\forall n \in I); U_n > 0$

- $(U_n)_{n\in I}$est strictement croissante $\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$.
- $(U_n)_{n\in I}$est strictement décroissante $\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$.
- $(U_n)_{n\in I}$est croissante s'elle est minorée par U_{n_0} ; et décroissante s'elle est majorée par U_{n_0}pour tout $n \geq n_0$.

Application ④

Etudier la monotonie de la suite(U_n) dans les cas suivants

$$U_n = \frac{2n-1}{n+4} \quad ; \quad U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad U_n = \frac{n+1}{2^n}$$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3n \end{cases}$$

IV. Suite arithmétique

1. Définition d'une suite arithmétique

Activité

Soit (U_n)une suite numérique définie par $U_n = 2n + 3$

1) Calculer les quatre premiers termes de (U_n). Que remarquez-vous ?
2) Calculer $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique.

On dit que $(U_n)_{n\in I}$est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{R}/U_{n+1} = U_n + r$ donc.

Le nombre réel r s'appelle la raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$.

Remarque

Pour montrer qu'une suite numérique $(U_n)_{n\in I}$est arithmétique il suffit de montrer que $(\forall n \in I); U_{n+1} - U_n = r$, de telle sorte que r ne dépend pas de n.

Exemple

Soient (U_n)et (V_n)deux suites numériques telles que $U_n = -4n + 1$ et $V_n = n^2 + 2$

⇨ On a $(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} - U_n = -4(n+1) + 1 - (-4n + 1) = -4n - 4 + 1 + 4n - 1 = -4$

Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -4$

⇨ Et On a $(\forall n \in \mathbb{N}); V_{n+1} - V_n = (n+1)^2 + 2 - (n^2 + 2) = n^2 + 2n + 1 + 2 - n^2 - 2 = 2n + 1$

Donc la suite (V_n)n'est pas une suite arithmétique car la différence $V_{n+1} - V_n$ dépend de n.

2. *Terme générale d'une suite arithmétique en fonction de n*

Propriété

Si $(U_n)_{n\in I}$est une suite arithmétique de raison r alors $\forall (n,p) \in I^2$ on a $U_n = U_p + (n-p)r$

Exemple

Soit (U_n)une suite arithmétique de raison $r = 2$ et son premier terme est $U_0 = -3$

On a $U_n = U_p + (n-p)r$ donc $U_n = U_0 + (n-0) \times r = -3 + 2n$

Application ⑤

1) Soit (U_n)une suite arithmétique telle que : $U_0 = 5$ et $U_{25} = 15$
   a) Déterminer r la raison de la suite (U_n).
   b) Exprimer $U_n$en fonction de n.
   c) Le nombre 203 est-il un terme de la suite (U_n) ? justifier

⇨ ***Propriété caractéristique d'une suite arithmétique***

Si x ,y et z (dans cet ordre) trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors on a $x + z = 2y$

Application ⑥

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique telle que $U_1 + U_2 + U_3 = 15$.

Calculer U_2 .

3. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété

Si $(U_n)_{n\in I}$est une suite arithmétique de raison r alors $\forall(n,p)\in I^2$ on a

$U_p+U_{p+1}+U_{p+2}+\ldots\ldots\ldots+U_n=\frac{(n-p+1)}{2}(U_p+U_n)$.

U_p le premier terme de la somme, U_n le dernier terme de la somme et $(n-p+1)$le nombre termes.

Exemple

Soit (V_n) une suite arithmétique telle que $V_n=2n+3$ .Calculer $S=\sum_{k=0}^{9}V_k$

On a $S=\sum_{k=0}^{9}V_k=\frac{(9-0+1)}{2}(V_0+V_9)$

Et on a $V_0=2\times0+3=3$ et $V_9=2\times9+3=21$ Donc $S=5(3+21)=120$

Application ②

Soit (U_n)une suite arithmétique telle que : $U_3=5$ et $U_{12}=20$

1) Déterminer r la raison de la suite (U_n). Puis déduire $U_n$en fonction de n.
2) Calculer $S=U_3+U_4+\ldots\ldots+U_{15}$

V. Suite géométrique

1. Définition d'une suite géométrique

Activité

Soit (U_n) une suite numérique définie par $(\forall n\in\mathbb{N});U_n=4\times3^n$.

1) Calculer $\frac{U_1}{U_0}$, $\frac{U_2}{U_1}$ et $\frac{U_3}{U_2}$. Que remarquez-vous ?
2) Déduire U_{n+1} en fonction de U_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Définition

Soit $(U_n)_{n\in I}$une suite numérique.

On dit que $(U_n)_{n\in I}$est une suite arithmétique si et seulement si $\exists q\in\mathbb{R}/U_{n+1}=qU_n$.

Le nombre réel q s'appelle raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$.

Exemple

Soit (U_n)une suite numérique telle que $(\forall n\in\mathbb{N})$;$U_n=-7\times5^n$.

On a $U_{n+1}=-7\times5^{n+1}=-7\times5^n\times5=5U_n$.

Donc (U_n)est une suite géométrique de raison 5.

Remarque

Pour montrer qu'une suite numérique $(U_n)_{n\in I}$ est géométrique il suffit de montrer que $(\forall n \in I); \frac{U_{n+1}}{U_n} = q (U_n \neq 0)$, de telle sorte que q ne dépend pas de n.

2. ***Terme générale d'une suite arithmétique en fonction de n***

Propriété

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q alors $\forall (n,p) \in I^2$ on a $U_n = U_p \times q^{n-p}$.

Remarque

Soit $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q.

- Si $p = 0$ alors $U_n = U_0 \times q^n$.
- Si $p = 1$ alors $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
- Si $q = 1$ alors la suite $(U_n)_{n\in I}$ est une suite constante.

Application ⑧

Soit (U_n) est une suite géométrique de raison q telle que $U_1 = -2$ et $U_4 = 5$.

Déterminer la raison de la suite (U_n) puis déduire le terme général en fonction de n.

⇨ ***Propriété caractéristique d'une suite géométrique***

Si x ,y et z (dans cet ordre) trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors on a $x \times z = y^2$

Application ⑨

Soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_1 \times U_2 \times U_3 = 27$. Calculer U_2

3. Somme de termes d'une suite géométrique

Propriété :

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q $(q \neq 1)$, alors

La somme des termes consécutifs $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \ldots\ldots + U_n$ est : $S = U_p \times \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

Application ⑩

Soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_0 = 2$ et $q = -3$.

1) Exprimer U_n en fonction de n .
2) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_9
3) Calculer $S = \sum_{k=1}^{9} U_k$

Exercice

Soit $(U_n)_n$ une suite numérique définie par $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{5} U_n + 2 \end{cases}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3

2) Soit (V_n) une suite numérique définie par $V_n = \frac{5}{2} - U_n$

a) Montrer que (V_n)est une suite géométrique, en déterminant sa raison et son premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Déduire $U_n$en fonction de n.

d) Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} V_k$.