Chapitre 4

Suites numériques

Niveau : 2ème Année Bac

PC & SVT

MATHEMATIQUES

Prof : Bouyguir Taher

Contenu du chapitre 4

I. Généralités sur les suites numériques (Rappel) 1

1. Activité 1

2. Définition d'une suite numérique réelle 1

3. Suite majorée, minorée, bornée 1

4. Monotonie d'une suite numérique 2

5. Suites arithmétiques et suites géométriques 2

II. Limite d'une suite numérique 2

1. Limite des suites de références 2

2. Convergence et divergence d'une suite 3

III. Convergence de la suite géométrique (q^n) 3

IV. Opérations sur les limites 4

V. Critères de convergence 5

VI. Propriétés 5

VII. Limite de la suite récurrente du type $f(u_n)$ 6

1. Limite de la suite du type : $v_n = f(u_n)$ 6

2. Limite de la suite récurrente du type : $u_{n+1} = f(u_n)$ 7

I. Généralités sur les suites numériques (Rappel)

1. Activité

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2 \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

① Calculer u_1 ; u_2 et u_3.

② Montrer que (u_n) est majorée par 8.

③ Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_n - 8$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

④ Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

⑤ Donner l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

⑥ Calculer la somme suivante : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.

2. Définition d'une suite numérique réelle

Définition 1 :

Soit n_0 un entier naturel (en général : $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

- Une ***suite numérique réelle*** est une fonction qui associe à tout entier naturel $n \geq n_0$ un nombre réel qui est noté u_n .
- On appelle u_n : le ***terme général*** de la suite ou le terme de la suite de rang n.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie « à partir du rang n_0 ».

3. Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2 :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombre réels.

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***majorée*** s'il existe un réel M tel que : $(\forall n \geq n_0) : u_n \leq M$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***minorée*** s'il existe un réel m tel que : $(\forall n \geq n_0) : u_n \geq m$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***bornée*** si elle est à la fois majorée et minorée.

4. Monotonie d'une suite numérique

Définition 3 :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombre réels.

- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***croissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***strictement croissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : u_{n+1} > u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***décroissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***strictement décroissante*** si : $(\forall n \geq n_0) : u_{n+1} < u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est ***constante*** si : $(\forall n \geq n_0) : u_{n+1} = u_n$.

5. Suites arithmétiques et suites géométriques

Soit (u_n) une suite numérique.

Nature de la suite	(u_n) suite ***arithmétique*** de raison r	(u_n) suite ***géométrique*** de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q.u_n$
Relation entre deux termes	$u_n = u_p + (n-p).r$	$u_n = u_p.q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \dfrac{(u_p + u_n).(n-p+1)}{2}$	$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p.\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ si $q \neq 1$

II. Limite d'une suite numérique

1. Limite des suites de références

Propriété 1 :

Soit p un entier naturel tel que : $p \geq 3$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Propriété 2 :

Soit (u_n) une suite numérique. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$$

2. Convergence et divergence d'une suite

Définition 4 :

- Une suite est dite « ***convergente*** » lorsqu'elle admet une limite finie.
- Une suite est dite « ***divergente*** » dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque
  - elle admet une limite égale à $+\infty$ ou à $-\infty$
  - ou bien elle n'admet pas de limite

Application 1 :

Etudier la convergence des suites : $u_n = \frac{-7}{n^5} + 2$; $v_n = 6 - n^4$ et $w_n = (-1)^n$.

Propriété 3 :

Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Propriété 4 :

Soit (u_n) une suite et l un nombre réel.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \iff \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$

Application 2 :

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + 5\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 5$.

III. Convergence de la suite géométrique (q^n)

Propriété 5 :

Soit q un nombre réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Application 3 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}73^n \; ; \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \; ; \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-2}{7}\right)^n \; ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{9^n} \; ; \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n - 3^n}{1 + 4^n} .$$

IV. Opérations sur les limites

Les tableaux ci-dessous résument les résultats à connaître concernant les opérations sur les limites.

On désigne par " $F.I$ " une forme indéterminée.

Limite d'une somme de deux suites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

Limite d'un produit de deux suites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n . v_n) =$	$l.l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I$

Limite d'un quotient de deux suites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$l \neq 0$ ou $\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0 en gardant un signe constat à partir d'un certain rang	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) =$	$\frac{l}{l'}$	0	$\pm\infty$	$F.I$	$\pm\infty$	$F.I$

Application 4 :

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \quad ; \quad u_n = n^2 + \sqrt{n}$$

$$u_n = \sqrt{n} - n \quad ; \quad u_n = (1-n)\left(\frac{5}{n^2} - 3\right)$$

$$u_n = \frac{3n^2 - n + 7}{n^2 + 7} \quad ; \quad u_n = \frac{n^2 - 5\sqrt{n}}{3n^2 + 2}$$

$$u_n = 2^n - 3^n$$

V. Critères de convergence

Critère 1 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites et l un nombre réel.

Si, à partir d'un certain rang, on a : $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,

alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Critère 2 :

Soient (u_n) ; (v_n) et (w_n) trois suites et l un nombre réel.

Si, à partir d'un certain rang, on a : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$,

alors (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

On dit que si une suite est encadrée par deux suites qui tendent vers le même nombre réel, alors elle tend elle-même vers ce réel, ce résultat est appelé « *théorème des gendarmes* ».

Application 5 :

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n+1}$

Critère 3 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$,
  alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Application 6 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-\sqrt{n} - \frac{3n}{2^n+1}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(n^2 + \sin n)$$

VI. Propriétés

Propriété 6 :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, on a :

- Si la suite (u_n) est positive alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.
- Si, à partir d'un certain rang, on a $u_n \leq v_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Propriété 7 :

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Cas particuliers :

- Toute suite croissante et négative converge.
- Toute suite décroissante et positive converge.

Application 7 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

① Montrer que : $u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

② Montrer que la suite (u_n) est croissante.

③ En déduire que la suite (u_n) converge.

Propriété 8 :

Soit (u_n) une suite et $r \in \mathbb{Q}^*$.

- Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemples :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{5}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[5]{n^3} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{2}{3}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$.

VII. Limite de la suite récurrente du type $f(u_n)$

1. Limite de la suite du type : $v_n = f(u_n)$

Propriété 9 :

Soient $(u_n)_{n\geq p}$ une suite convergente et l sa limite et soit f une fonction continue en l.

La suite $(v_n)_{n\geq p}$ définie par $\forall n \geq p : v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(l)$.

Application 8 :

Soit (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \sqrt{\dfrac{3n+2}{n+1}}$.

Montrer que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Limite de la suite récurrente du type : $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété 10 :

Soit $(u_n)_{n\geq p}$ une suite définie par son premier terme u_p et la relation $\forall n \geq p : u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$.

Si $u_p \in I$ et $(u_n)_{n\geq p}$ est convergente, alors sa limite l est une solution de l'équation : $f(x) = x$.

Application 8 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \frac{2}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 3}$.

Pour étudier cette suite, on lui associe la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x + 2}{2x + 3}$.

① Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < 1$.

② Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

③ Vérifier que f est continue sur $[0; 1]$.

④ Montrer que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

⑤ Déterminer $f([0; 1])$.

⑥ Résoudre l'équation : $f(x) = x$.

⑦ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Application 9 :

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

① Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 4$.

② Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire qu'elle est convergente.

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{3x + 4}$.

③ Dresser le tableau de variations de la fonction f.

④ Montrer que $f([0; 4]) \subset [0; 4]$.

⑤ Résoudre l'équation : $f(x) = x$, puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.