Le contenu	Remarques

I. Suites arithmétiques (Rappel)

✍ Activité :

Observer puis compléter par quatre nombres convenables pour continuer la série de chacune des listes suivantes :

- ✓ $1\,;3\,;5\,;7\,;9\,;\ 11\,;\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ✓ $1\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{4}\,;\frac{1}{5}\,;\frac{1}{6}\,;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ✓ $-3\,;\frac{-3}{2}\ ;\frac{-3}{4}\ ;\frac{-3}{8}\ ;\frac{-3}{16}\ ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- ✓ $\frac{1}{2}\ ;\frac{2}{3}\ ;\frac{3}{4}\ ;\frac{4}{5}\ ;\frac{5}{6}\ ;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

❍ Exemples :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2n-1 \quad \forall n \in N$

1) Calculer le premier terme de la suite U_0.
2) Calculer les quartes premiers termes de la suite (U_n) .
3) Calculer $U_{n+1} - U_n$.
4) Conclure.

1) Définition d'une suite arithmétique :

✍✍ Définition :

On dit que $(U_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique s' il existe un nombre réel r tel que $U_{n+1} = U_n + r$ $(\forall n \geq n_0)$. Le nombre r est appelé raison de la suite $(U_n)_{n\geq n_0}$.

✍Application :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 2n+3 \quad \forall n \in N$.

1) Calculer $U_{n+1} - U_n$.
2) Que peut on conclure .

2) Le terme générale d'une suite arithmétique :

✍✍ Propriétés

❖ Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_0
Alors $\mathbf{U_n = U_0 + (n-0)r}$ **.**
❖ Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_1
Alors $\mathbf{U_n = U_1 + (n-1)r}$
❖ Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme U_2
Alors $\mathbf{U_n = U_2 + (n-2)r}$ **.**

3) La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

✍✍ Propriété

Soit (U_n) est une suite arithmétique ;
On pose $\mathbf{S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \cdots + U_n}$ tel que $\mathbf{(p<n)}$ on a :

$$\mathbf{S_n = \left(\frac{U_p + U_n}{2}\right)(n-p+1)\ .}$$

❍ Exemples :

Soit $(\mathbf{U_n})$ une suite arithmétique de raison $\mathbf{r} = \frac{1}{2}$ et son premier terme $\mathbf{U_0} = \mathbf{1}$ .Calculer la somme suivante $S = \mathbf{U_0} + \cdots + \mathbf{U_{30}}$

Soit $(\mathbf{U_n})$ une suite arithmétique de raison $\mathbf{r} = -\mathbf{2}$ et son premier terme $\mathbf{U_0} = \mathbf{4}$ .Calculer la somme suivante$S = \mathbf{U_3} + \cdots + \mathbf{U_{30}}$

✍ Exercice 1:

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = 3n + 1 \quad \forall n \in N$.

1) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique.

2) Calculer la somme suivante $S = \mathbf{U_6} + \cdots + \mathbf{U_{10}}$.

✍ Exercice2 :

Soit $(\mathbf{U_n})$ une suite arithmétique de raison $\mathbf{r} = 2$ et son premier terme $\mathbf{U_0} = \mathbf{3}$ **.**

1) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_3}$.

2) Exprimer $\mathbf{U_n}$ en fonction de **n .**

3) Calculer la somme suivante $S = \mathbf{U_1} + \cdots + \mathbf{U_{10}}$.

II. Suites géométriques

1) Définition d'une suite géométrique

✎✎ Définition :

On dit que $(U_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique s'il existe un nombre réel q tel que $U_{n+1} = qU_n \quad (\forall n \geq n_0)$. Le nombre **q** est appelé raison de la suite $(U_n)_{n\geq n_0}$.

❍ Exemples :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 2 * 3^n \quad \forall n \in N$

1) Calculer le premier terme de la suite U_0.

2) Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

3) Conclure.

✍Application :

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$U_n = 3 * \left(\frac{2}{5}\right)^n \quad \forall n \in N.$

1) Montrer que (U_n) est une suite géométrique puis déterminer sa raison et son premier terme.

2) terme générale d'une suite arithmétique :

✎✎ Propriété

Si (U_n) est une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme U_0 alors $U_n = U_0 * q^n$.
Si (U_n) est une suite géométrique de raison non nul q et de premier terme U_1 alors $U_n = U_0 * q^{n-1}$.

❍ Résultat :

Si (U_n) est une suite géométrique de raison non nul q alors pour tout $p \in N$ $U_n = U_p * q^{n-p}$.

3) La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

Propriété

Soit (U_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$;
on pose $\boldsymbol{S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \cdots + U_n}$ *tel que* $\boldsymbol{(p < n)}$ *on a :*

$$\boldsymbol{S_n} = U_p * \left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right).$$

❍ Exemples :

Soit $(\mathbf{U_n})$ une suite géométrique de raison $\mathbf{q = \frac{1}{3}}$ et son premier terme $\mathbf{U_0 = 81}$.

1) Exprimer $\mathbf{U_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$.
2) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_3}$.
3) Calculer la somme $S = \mathbf{U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_{10}}$.

Exercice 1:

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = 3U_n$ et $U_0 = 2$ $\forall n \in N$.

1) Vérifier que (U_n) est une suite géométrique .
2) Exprimer U_n en fonction de n .
3) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_5}$.
4) Calculer la somme $S = \mathbf{U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_5}$.

III. Les suites de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$

❍ Exemples :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 3 \\ U_0 = 1 \end{cases}$ $\forall n \in N$

1) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_3}$.

Définition :

Soit a et b deux réels.
La suite définie par son premier terme U_0 et la relation $U_{n+1} = aU_n + b$ pour tout $\mathbf{n \in N}$ est appelée une suite récurrente.

❍ Exemples :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = 2U_n + 2 \\ U_0 = 2 \end{cases}$ $\forall n \in N$

1) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{U_3}$.
2) On pose $V_n = U_n + 2$ $\forall n \in N$.
   a) Calculer V_1 et V_2 et V_3 .
   b) Calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ puis déduire la nature de la suite (V_n).
   c) Exprimer (V_n) en fonction de n.
   d) En déduire l'expression (U_n) en fonction de n .
3) Calculer les sommes suivantes :
$S_1 = \mathbf{V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_5}$ et $S_2 = \mathbf{U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_5}$

✍ Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \\ U_0 = 10 \end{cases} \forall n \in N$

et la suite $V_n = U_n - 3 \ \forall n \in N$.

1) Calculer $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$ et $\mathbf{V_0}$ et $\mathbf{V_1}$.

2) Montrer que $(\mathbf{V_n})$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

3) Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .

4) Calculer les sommes suivantes :

$S_1 = \mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} + \mathbf{V_3} + \cdots + \mathbf{V_5}$ et $S_2 = \mathbf{U_1} + \mathbf{U_2} + \mathbf{U_3} + \cdots + \mathbf{U_5}$