Transformations usuelles dans le plan

Remarques

I. Symétrie centrale- Symétrie axiale- Translation :

1) Rappels :

Activité ①:

Soient $ABCD$ un losange de centre O et I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AD]$.

1) Construire une figure convenable.

2) **a)-** Déterminer les symétriques des points A, B et O par rapport à O.

b)- En déduire le symétrique de la droite (AB) par rapport à O.

3) **a)-** Déterminer les symétriques des points B, O et I par rapport à la droite (AC).

b)- En déduire le symétrique de la droite (OI) par rapport à la droite (AC).

4) Déterminer l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

5) **a)-** Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

b)- En déduire l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

6) Déterminer l'image du segment $[BO]$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

2) Définitions :

a) Symétrie axiale :

Définition:

(D) est une droite dans le plan.

La ***symétrie axiale*** (ou réflexion) d'axe (D) est la ***transformation plane*** qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que (D) soit la médiatrice du segment $[MM']$.

On dit que M' est l'***image*** de M par la symétrie axiale d'axe (D) et on écrit: $M' = S_{(D)}(M)$.

Remarque:

Pour tout point M de (D), on a : $S_{(D)}(M) = M$.

On dit que tous les points de (D) sont ***invariants*** par la symétrie axiale d'axe (D).

b) Symétrie centrale :

Définition:

soit O un point dans le plan.

La ***symétrie centrale*** de centre O est la ***transformation plane*** qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que O soit le milieu du segment $[MM']$.

On dit que M' est l'***image*** de M par la symétrie centrale de centre O et on écrit:

$$M' = S_O(M).$$

Remarque:

L'unique point ***invariant*** par la symétrie centrale est son centre.

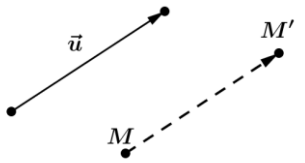
c) Translation

Définition:

soit $\vec{U}$ un vecteur dans le plan.

La ***translation*** de vecteur $\vec{U}$ est la ***transformation plane*** qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{U}$.

On dit que M' est l'***image*** de M par la translation de vecteur $\vec{U}$ et on écrit : $t_{\vec{U}}(M)=M'$



Remarques:

- Si $\vec{U}\neq\vec{0}$, la translation $t_{\vec{U}}$ n'a aucun point invariant.
- Tous les points du plan sont invariants par la translation $t_{\vec{0}}$.

Application ①:

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.

$ABCD$ est un quadrilatère du plan tel que B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ et D est l'image de C par la translation de vecteur $2\vec{u}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

2) Soit I le milieu du segment $[CD]$. Monter que $ABIC$ est un parallélogramme.

Exercice ①:

ABC est un triangle.

Pour tout point M du plan on considère le M' tel que : $\overrightarrow{MM'}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Montrer que M' est l'image de M par une translation à préciser son vecteur.

II. Homothétie:

Activité ②:

Soient OAB un triangle.

1) Construire les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}=-2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

On a $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}$, on dit que M est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $k=2$.

2) Que représente le point N par rapport au point B et le point P par rapport au point A.

3) Construire le point Q l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport $k=-1$.

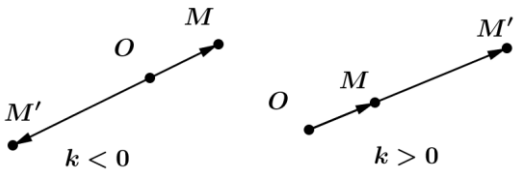
Qu'est-ce que vous-remarquez ?

Définition:

soit O un point dans le plan et $k\in\mathbb{R}^*$.

L'***homothétie*** de centre O et de rapport k est la ***transformation du plan*** qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que: $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$.

On dit que M' est l'***image*** de M par l'homothétie de centre O et de rapport k et on écrit : $M'=h(M)$.



Remarque:

Soit h une homothétie de centre O et de rapport k tel que $k \in \mathbb{R}^*$:

- Si $k = 1$, alors tous les points du plan sont invariants par h.
- Si $k \neq 1$, alors le point O est le seul point invariant par h.
- Si $k = -1$, alors h est la symétrie centrale de centre O.
- Si $|k| > 1$, alors h est un ***agrandissement*** de rapport $|k|$.
- Si $|k| < 1$, alors h est une ***réduction*** de rapport $|k|$.

Application ②:

1) Exprimer vectoriellement la proposition suivante: B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{3}{2}$.

2) Exprimer la relation vectorielle $\overrightarrow{JK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{JL}$ par une homothétie.

3) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en B dans les cas suivants : • $2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ • $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

Exercice ②:

Soient A et B deux points du plan (P).

Soit T la transformation plane qui à tout point M associe le point M' tel que :

$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.

1) Montrer que T un unique point invariant I. $(T(I) = I)$.

2) **a)**-Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.

b)-En déduire la nature de la transformation T.

III. Propriété caractéristique de : la translation - l'homothétie :

1) Propriété caractéristique de la translation

Propriété:

Soit T une transformation plane.

T est une translation si et seulement si pour tous points M et N du plan, on a :

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ tels que $T(M) = M'$ et $T(N) = N'$.

Conséquence:

Soient $t_{\vec{U}}$ une translation de vecteur $\vec{U}$ et M' et N' les images respectives de M et N par $t_{\vec{U}}$. On a :

- $M'N' = MN$. On dit que la translation conserve la distance.
- $(M'N') // (MN)$.

Application ②:

ABC est un triangle et I un point du segment $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Construire B' et C' les images respectives de B et C par t la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$.

2) Déterminer la nature du quadrilatère $BCC'B'$.

2) Propriété caractéristique de l'homothétie :

Propriété:

Soit T une transformation plane et $k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$.

T est une homothétie de rapport k si et seulement si pour tous points M et N du plan, on a : $\overrightarrow{M'N'}=k\overrightarrow{MN}$ tels que $T(M)=M'$ et $T(N)=N'$.

Conséquences:

Soient h une homothétie de rapport $k\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ et M' et N' les images respectives de M et N par h. On a :

- $M'N'=|k|MN$. On dit que l'homothétie ne conserve pas la distance.
- $(M'N')//(MN)$.

Application ②:

$ABCD$ est un trapèze tel que: $(AB)//(CD)$ et $AB=\frac{1}{3}CD$.

1) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C.

2) Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D.

IV. Propriétés :

1) Conservation de coefficient de colinéarité de deux vecteurs :

Propriété:

T une transformation plane et $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Soient A,B,C et D tels que $A\neq B$ des points du plan et A',B',C' et D' ses images respectives par T.

Si $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{C'D'}=\alpha\overrightarrow{A'B'}$.

On dit que les transformations usuelles conservent le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Conséquences:

Soit T une transformation plane.

- Si A,B et C sont trois points alignés, alors A',B' et C' ses images respectives par T sont aussi alignés.
- Si I est le milieu du segment $[AB]$ et A',B' et I' les images respectives par T de A,B et I, alors I' est le milieu du segment $[A'B']$.

- Les transformations conservent le parallélisme de deux droites.

✍ *Application ②:*

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.

On considère les points B' et C' du plan définis par : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et soit J le milieu de $[B'C']$.

A l'aide d'une homothétie, montrer que les points A, I et J sont alignés.

2) Conservation de la mesure d'un angle géométrique :

✍✍ *Propriété:*

T une transformation plane.

Soient A, B et C des points du plan et A', B' et C' ses images respectives par T. On a : $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

On dit que les transformations usuelles conservent la mesure d'un angle géométrique.

○ *Conséquences:*

Les transformations usuelles conservent l'orthogonalité de deux droites.

✍ *Application ②:*

$OABC$ est un rectangle.

On considère t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OC}$.

1) Soient O', A', B' et C' les images respectives de O, A, B et C par t.

Montrer que $O'A'C'B'$ est un rectangle.

2) On considère les points M et N du plan définis par : $\overrightarrow{OM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{O'N}=\frac{2}{5}\overrightarrow{O'A'}$.

Montrer que du plan $CM = C'N$.

3) Conservation de l'intersection de deux droites :

✍✍ *Propriété:*

T une transformation plane.

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en A et (D') et (Δ') ses images respectives par T.

Les droites (D') et (Δ') sont sécantes en A' l'image de A par T.

On dit que les transformations usuelles conservent l'intersection de deux droites.

✍ *Application ②:*

$ABCD$ est un parallélogramme. I un point de $[BD]$ différent de B et D.

J est l'intersection de (AI) et (BC) et K est l'intersection de (AI) et (CD)

On considère h l'homothétie de centre I et transforme B en D.

1) Faire une figure.

2) Déterminer $h(A)$ et $h(J)$.

Montrer que : $IA^2 = IJ \times IK$.

4) Image d'un cercle par une transformation plane :

Propriété:

- Soit T une transformation plane différente à une homothétie.

L'image du cercle $C(I,R)$ de centre I est de rayon R par T est le cercle $C'(I',R)$ tel que $T(I)=I'$.

- Soit h une homothétie de rapport k tel que $k\in\mathbb{R}^*$.

L'image du cercle $C(I,R)$ par h est le cercle $C'(I',|k|R)$ tel que $T(I)=I'$.

Exercice de synthèse:

$ABCD$ est un parallélogramme et I et J sont deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$.

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Soit h l'homothétie de centre I et transforme B en C.

a) Montrer que $h((AB))=(CD)$.

b) Montrer que le rapport de h est $k=-2$.

c) Soit K l'image de J par h. Montrer que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CK}$.