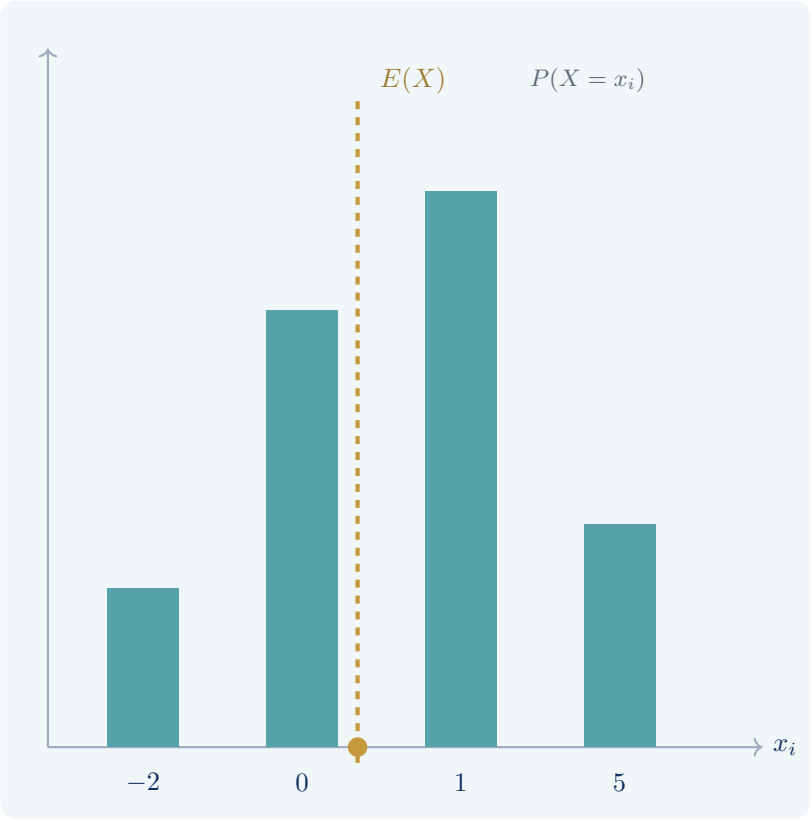
Prof. Taher Bouyguir

Professeur de mathématiques
Secondaire qualifiant

Prof Taher
Prof Taher Bouyguir
Taher Bouyguir
Contact WhatsApp
Telegram
mr.bouyguir@gmail.com
www.proftaher.com

CHAPITRE 7

Variable aléatoire réelle



Cours et corrigés des applications

1ère Spé Maths

7
Cours

Variable aléatoire réelle

Capacités attendues

- Interpréter et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}$, $P(X = a)$, $P(X < a)\ldots$
- Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- Calculer et interpréter l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire.
- Connaître et utiliser les propriétés de l'espérance et de la variance.

Prérequis (Chap 3) : univers, événements, loi de probabilité sur un univers fini, équiprobabilité $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$, arbres pondérés.

Table des matières

I Variable aléatoire réelle . . . 3
1 Définition . . . 3
2 Les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}\ldots$ . . . 3
3 Langue naturelle et langage symbolique . . . 4
II Loi de probabilité d'une variable aléatoire . . . 5
III Espérance, variance, écart type . . . 7
1 Espérance . . . 7
2 Variance et écart type . . . 7
IV Propriétés de l'espérance et de la variance . . . 9
Corrigés des applications . . . 12

I Variable aléatoire réelle

1 Définition

Définition 1 : variable aléatoire

Soit Ω l'univers (fini) d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un **nombre réel**.

Exemple : un jeu de dé

On lance un dé équilibré à six faces. On gagne 5 € si on obtient 6, on gagne 1 € si on obtient 4 ou 5, et on perd 2 € sinon. Le gain X est une variable aléatoire :

Issue	1	2	3	4	5	6
Valeur de X	-2	-2	-2	1	1	5

X prend les valeurs -2, 1 et 5.

2 Les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}$...

Définition 2 : événements liés à X

Soit a un réel.

- $\{X = a\}$ est l'événement formé des issues pour lesquelles X prend la valeur a ; sa probabilité se note $P(X = a)$.
- De même : $\{X < a\}$, $\{X \leqslant a\}$, $\{X > a\}$, $\{X \geqslant a\}$, $\{a \leqslant X \leqslant b\}$...

Exemple

Avec le jeu de dé : $\{X = 1\} = \{4\,;5\}$, donc $P(X = 1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $\{X > 0\} = \{4\,;5\,;6\}$, donc $P(X > 0) = \dfrac{1}{2}$.

3 Langue naturelle et langage symbolique

En français	En symboles
« X vaut exactement 3 »	$X = 3$
« au moins 3 » (3 ou plus)	$X \geqslant 3$
« au plus 3 » (3 ou moins)	$X \leqslant 3$
« plus de 3 » / « strictement plus de 3 »	$X > 3$
« moins de 3 » / « strictement moins de 3 »	$X < 3$
« entre 1 et 3 (inclus) »	$1 \leqslant X \leqslant 3$
« au moins un »	$X \geqslant 1$, de contraire $X = 0$

Remarque

L'événement contraire de $\{X \geqslant a\}$ est $\{X < a\}$: donc $P(X \geqslant a) = 1 - P(X < a)$. C'est très utile pour « au moins un » : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$.

Application 1

On lance deux pièces équilibrées et on note X le nombre de « Pile » obtenus.

1. Écrire l'univers Ω et les valeurs prises par X.
2. Décrire l'événement $\{X = 1\}$ par une phrase, puis calculer $P(X = 1)$.
3. Traduire par une phrase $\{X < 2\}$ et calculer $P(X < 2)$.
4. Traduire en symboles « obtenir au moins un Pile » et calculer sa probabilité.

Ma réponse :

II Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3 : loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, …, x_n. Donner la **loi de probabilité** de X, c'est donner la probabilité $p_i = P(X = x_i)$ de chaque valeur, en général dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

On a toujours $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Méthode : déterminer une loi de probabilité

1. Lister toutes les valeurs possibles de X (dans l'ordre croissant).
2. Calculer la probabilité de chaque valeur (équiprobabilité, arbre pondéré, tableau…).
3. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

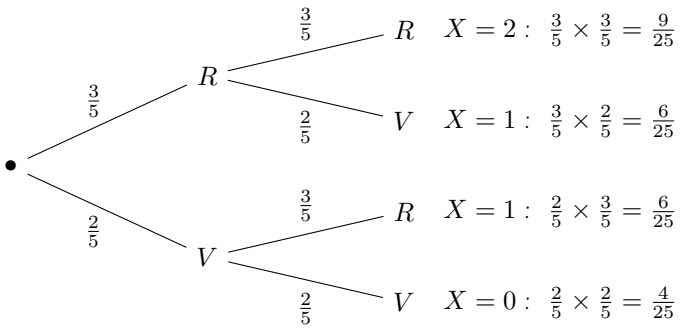
Exemple : jeu de dé

x_i	-2	1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Vérification : $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

Exemple : avec un arbre

Une urne contient 3 boules rouges et 2 vertes. On tire successivement **avec remise** deux boules ; X est le nombre de boules rouges obtenues. À chaque tirage, $P(R) = \frac{3}{5}$ et $P(V) = \frac{2}{5}$.



x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{25}$

Application 2

On lance deux dés équilibrés à quatre faces (numérotées de 1 à 4) et on note X la somme des deux numéros.

1. À l'aide d'un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $P(X \geqslant 6)$ et traduire cette probabilité par une phrase.

Ma réponse :

Application 3

(Modéliser) Pour jouer, on paie 2 €, puis on lance un dé équilibré. Si on obtient 6, on reçoit 10 € ; si on obtient 4 ou 5, on reçoit 2 € ; sinon on ne reçoit rien. On note X le **gain net** du joueur.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer la probabilité de ne pas perdre d'argent.

Ma réponse :

III Espérance, variance, écart type

1 Espérance

Définition 4 : espérance

L'**espérance** de X est le nombre

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i.$$

Remarque

- $E(X)$ est la **valeur moyenne** de X si on répète l'expérience un très grand nombre de fois.
- Pour un jeu où X est le gain : si $E(X) > 0$ le jeu est favorable au joueur, si $E(X) < 0$ il est défavorable, et si $E(X) = 0$ le jeu est dit **équitable**.

Exemple : jeu de dé

$E(X) = -2 \times \dfrac{1}{2} + 1 \times \dfrac{1}{3} + 5 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{-6+2+5}{6} = \dfrac{1}{6} \approx 0{,}17.$
En moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur gagne environ $0{,}17$ € par partie : le jeu lui est favorable.

2 Variance et écart type

Définition 5 : variance et écart type

La **variance** de X est le nombre positif

$$V(X) = p_1\big(x_1 - E(X)\big)^2 + \cdots + p_n\big(x_n - E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\big(x_i - E(X)\big)^2.$$

L'**écart type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque

La variance et l'écart type mesurent la **dispersion** des valeurs de X autour de l'espérance : plus $\sigma(X)$ est grand, plus le jeu est « risqué ». L'écart type s'exprime dans la même unité que X.

Propriété 1 : formule de König-Huygens

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2, \qquad \text{où} \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i.$$

Démonstration

En notant $m = E(X)$: $\sum p_i(x_i - m)^2 = \sum p_i x_i^2 - 2m\sum p_i x_i + m^2 \sum p_i = E(X^2) - 2m \times m + m^2 \times 1 = E(X^2) - m^2$. □

Exemple : jeu de dé

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{6} = \frac{12 + 2 + 25}{6} = \frac{39}{6}.$$

$$V(X) = \frac{39}{6} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{234 - 1}{36} = \frac{233}{36} \approx 6{,}47 \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{233}{36}} \approx 2{,}54 \text{ €}.$$

Remarque

À la calculatrice : on entre les valeurs x_i dans une liste et les probabilités p_i dans une autre, puis on utilise le mode statistiques à 2 variables : la moyenne $\bar{x}$ donne $E(X)$ et σ_x donne $\sigma(X)$.

Application 4

1. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable X de l'application 2 (somme de deux dés à quatre faces).
2. Calculer l'espérance du gain net X de l'application 3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Ma réponse :

Application 5

Pour jouer, on paie 2 € et on lance un dé équilibré. Si on obtient 6, on reçoit a € ; sinon on ne reçoit rien. Déterminer a pour que le jeu soit équitable.

Ma réponse :

IV Propriétés de l'espérance et de la variance

Propriété 2 : transformation affine

Soit X une variable aléatoire et a, b deux réels. Alors :

$$E(aX+b) = a\,E(X) + b \qquad V(aX+b) = a^2\,V(X) \qquad \sigma(aX+b) = |a|\,\sigma(X).$$

Démonstration

$aX+b$ prend les valeurs ax_i+b avec les mêmes probabilités p_i. Donc $E(aX+b) = \sum(ax_i+b)p_i = a\sum x_i p_i + b\sum p_i = aE(X)+b$.
Puis $(ax_i+b) - E(aX+b) = a\big(x_i - E(X)\big)$, donc $V(aX+b) = \sum p_i\, a^2\big(x_i-E(X)\big)^2 = a^2V(X)$. □

Remarque

Ajouter une constante b décale la moyenne mais **ne change pas** la dispersion ; multiplier par a multiplie l'écart type par $|a|$.

Exemple

Les notes X (sur 20) d'un devoir ont une moyenne $E(X) = 12$ et un écart type $\sigma(X) = 3$.

- Si le professeur ajoute 2 points à tout le monde : $Y = X + 2$, $E(Y) = 14$ et $\sigma(Y) = 3$.
- Si on ramène les notes sur 10 : $Z = \frac{1}{2}X$, $E(Z) = 6$ et $\sigma(Z) = 1{,}5$.

Application 6

Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 4$ et $V(X) = 2$. Calculer :

$$E(2X-3) \quad ; \quad V(2X-3) \quad ; \quad E(-X+5) \quad ; \quad \sigma(-X+5).$$

Ma réponse :

Application 7

(Synthèse) Une urne contient 10 boules : 1 rouge, 3 vertes et 6 blanches. On tire une boule au hasard. Une boule rouge fait gagner 10 €, une verte fait gagner 2 €, une blanche fait perdre 1 €. On note X le gain.

1. Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $P(X \geqslant 2)$.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter.
3. Calculer $V(X)$ et $\sigma(X)$.
4. L'organisateur fait désormais payer c euros la participation. On note $Y = X - c$ le gain net. Déterminer c pour que le jeu soit équitable. Que vaut alors $\sigma(Y)$?

Ma réponse :

Corrigés des applications

Corrigé de l'application 1

1. $\Omega = \{PP\,;PF\,;FP\,;FF\}$ (4 issues équiprobables) ; X prend les valeurs 0, 1 et 2.
2. $\{X=1\}$: « obtenir exactement un Pile » $= \{PF\,;FP\}$, donc $P(X=1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
3. $\{X<2\}$: « obtenir moins de deux Pile » (au plus un Pile) : $P(X<2) = 1 - P(X=2) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.
4. « au moins un Pile » : $\{X \geqslant 1\}$; $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Corrigé de l'application 2

1. Les 16 couples sont équiprobables. En comptant les sommes dans le tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

2. $P(X \geqslant 6) = \dfrac{3+2+1}{16} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$: probabilité que la somme soit au moins égale à 6.

Corrigé de l'application 3

1. Gains nets : $10-2=8$; $2-2=0$; $0-2=-2$. X prend les valeurs -2, 0 et 8.
2.

x_i	-2	0	8
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

3. $P(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé de l'application 4

1. $E(X) = \dfrac{2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times3+7\times2+8\times1}{16} = \dfrac{80}{16} = 5$.
   $V(X) = \dfrac{1\times9+2\times4+3\times1+4\times0+3\times1+2\times4+1\times9}{16} = \dfrac{40}{16} = 2{,}5$ et $\sigma(X) = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58$.
2. $E(X) = -2\times\dfrac{1}{2} + 0\times\dfrac{1}{3} + 8\times\dfrac{1}{6} = -1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}33 > 0$: le jeu est favorable au joueur.

✔ Corrigé de l'application 5

Le gain net vaut $a-2$ avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et -2 avec la probabilité $\frac{5}{6}$. $E(X)=\frac{a-2}{6}-\frac{10}{6}=\frac{a-12}{6}$. Le jeu est équitable si $E(X)=0$, c'est-à-dire $a=12$ €.

✔ Corrigé de l'application 6

$E(2X-3)=2\times 4-3=5$; $V(2X-3)=2^2\times 2=8$; $E(-X+5)=-4+5=1$; $\sigma(-X+5)=|-1|\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

✔ Corrigé de l'application 7

1.

x_i	-1	2	10
$P(X=x_i)$	$0{,}6$	$0{,}3$	$0{,}1$

$P(X\geqslant 2)=0{,}3+0{,}1=0{,}4$.

2. $E(X)=-0{,}6+0{,}6+1=1$: en moyenne, le joueur gagne 1 € par partie.
3. $E(X^2)=1\times 0{,}6+4\times 0{,}3+100\times 0{,}1=11{,}8$; $V(X)=11{,}8-1^2=10{,}8$; $\sigma(X)=\sqrt{10{,}8}\approx 3{,}29$ €.
4. $E(Y)=E(X)-c=1-c=0 \iff c=1$ €. $\sigma(Y)=\sigma(X)\approx 3{,}29$ € (une constante ne change pas l'écart type).