Lycée qualifiant Mohamed VI Niveau : 1 BAC-SEG	DEVOIR LIBRE N° 1 A rendre le 31/10/2022	Professeur : Bouyguir Taher Année scolaire : 2022/2023

Exercice 1 :

1. Étudier la vérité de chacune des propositions suivantes et justifier votre réponse :

$$P : " (\forall x \in \mathbb{R}) : x \leqslant -1 \Rightarrow x < 0 "$$
$$Q : " (\forall x \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R}) : x < a < x+1 "$$
$$R : " (\sqrt{4} = 2) \vee (\sqrt{13} \neq 3)"$$
$$S : " (\exists a \in \mathbb{R}) : a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{a} \in \mathbb{Z}"$$
$$T : " \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + \sqrt{2} > 0 "$$

2. Donnez la négation des propositions ci-dessus.
3. Écrivez les propositions ci-dessus sans utiliser les quantificateurs et les symboles mathématiques .

Exercice 2 :

1. En utilisant le raisonnement par contraposée montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (x \neq -1 \wedge y \neq -1) \Rightarrow x + y + xy \neq -1$$

2. En utilisant les équivalences successives , montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$$

3. Soit x , y, et z des nombres réels tels que : $x + y + z > 1$, En utilisant le raisonnement par absurde montrez que : $x > \frac{1}{3}$ ou $y > \frac{1}{3}$ ou $z > \frac{1}{3}$.
4. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : (\frac{5}{4})^n \geqslant 1 + \frac{1}{4}n$
   Et montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$.

Exercice 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 2 = -|x-3|$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations : $E_1 : x^2 - 3x - 4 = 0$ et $E_2 : -x^2 + 2x + \frac{5}{4} = 0$.
3. Dressez dans le même tableau les variations du signe de (E_1) et (E_2)
4. Déduire les solutions des inéquations $(E_3) : \frac{x^2-3x-4}{-x^2+2x+\frac{5}{4}} \leqslant 0$ et $(E_4) : |-x^2+2x+\frac{5}{4}| + |x^2-3x-4| \geq 0$
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^3 - 8x^2 - 5x = 0$ (*Indication* : utilisez la question 2.)

Exercice 4 :

Dans une entreprise de fabrication des vélos, les coûts de fabrication de q vélos sont donnés en dirhams par :

$$C(q) = q^2 + 100q + 15000$$

1. Déterminer le nombre des vélos à fabriquer pour que les coûts de fabrication soient égaux à 16100 Dhs.
2. L'entreprise vend chaque objets fabriqué à 870 Dhs.
   (a) Montrer que le bénéfice $B(q)$, en dirhams, pour q vélos vendus, est : $B(q) = -q^2 + 770q - 15000$
   (b) Quel est le nombre minimum des vélos que l'entreprise doit-elle fabriquer pour que son bénéfice soit positif?
   (c) Quel est le nombre maximum des vélos que l'entreprise doit-elle fabriquer pour que son bénéfice reste positif?