Devoir Libre n^o 1 : Logique - Généralités sur les fonctions

Exercice 1 (Quelques raisonnements)

1. On considère les deux propositions P et Q définies par :

   $P : \ll (\forall y \in \mathbb{R}^*)(\exists x \in \mathbb{R})\,;\, x^2 - xy + y^2 = 0 \gg$ et $Q : \ll (\forall x \in \mathbb{R})\,;\, \sqrt{1+x^2} - |x| \geq 0 \gg$

   a) Nier la proposition P et la proposition Q. b) Montrer que P est fausse et Q est vraie.

2. Nier la proposition : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\,;\, (a - b > 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{Z}/a < N < b)$
3. (a) Montrer en utilisant la contraposée que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\dfrac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n}{3} \in \mathbb{N}$

   (b) En déduire par l'absurde que : $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3 - 2|x-4| = 2x+5\,;\, |x-1| + |x+1| = 4$
5. Soit $(n \in \mathbb{N})$, Montrer que si $2n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de deux carrés parfaits.

Exercice 2 (Récurrence)

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: 9 divise $7^n + 21n - 1$ b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

Exercice 3 (Généralités sur les fonctions)

On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{-x^2+2x+7}{2}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis dresser tableau de variations de f.
2. Construire dans un repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
3. Déterminer graphiquement $f([-1;0])$ et $f([0;+\infty[)$.
4. Vérifier que : $f(3) = g(3)$ puis dresser tableau de variations de g.
5. Construire dans même repère la courbe $(\mathcal{C}_g)$.
6. Résoudre graphiquement : $2\sqrt{x+1} + x^2 - 2x - 7 < 0$.
7. Soit h la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $h(x) = -\dfrac{1}{2}x + \sqrt{x+1} + 3$.

   (a) Vérifier que : $h = gof$.

   (b) En déduire les variations de h sur $[-1;0]$ et sur $[0;+\infty[$.

   (c) En déduire que $\left[(\forall x \in [-1;+\infty[) : -x + 2\sqrt{x+1} \leq 2\right]$

Exercice 4 (Extremums d'une fonctions)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-4x+6}{x^2-4x+8}$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $x^2 - 4x + 8 > 0$ puis déterminer $\mathcal{D}_f$
2. Montrer que $f(2) = \dfrac{1}{2}$ est la valeur minimale de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\, f(x) \leqslant 1$. 1 est-elle la valeur maximale de f sur $\mathcal{D}_f$?