DEVOIR LIBRE n^o 1 : LIMITE ET CONTINUITÉ

Exercice 1

1). Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-\sqrt{x^2+x+4}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x+\sqrt{2x^2+3x-7}-1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tan(x)-sin(x)}{x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-x^3}{x^2+x-1}$

2). Montrer que la fonction f est continue en -3 . $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)\sqrt{1-x}+2}{x+3}; & x \neq -3 \\ \dfrac{9}{4}; & x = -3 \end{cases}$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$

1. Résoudre dans $[-1;+\infty[$ l'équation : $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}=0$ puis déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les limites : $lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Est ce que f admet un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 3)

Soit f la fonction définie sur $I = [-1;0[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, puis justifier que f est continue sur I.
2. Montrer que f est strictement décroissante sur I.
3. Montrer que l'équation $f(x) = x^3$ admet une unique solution α dans I .
4. En utilisant la méthode de Dichotomie déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.25
5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
6. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x dans J
7. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ ont un seul point commun que l'on déterminera.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \begin{cases} x+\sqrt[3]{x} & x \geq 1 \\ 2\sqrt[3]{x} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$

1. Montrer que g est continue au point 1.
2. Montrer que g est dérivable à droite et à gauche de 1.
3. f est-elle dérivable en 1 ? (justifier)
4. Montrer que $(\forall x \in [0;1[)\ g'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$ et $(\forall x \geq 1)$, $g'(x) = \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

5. Dresser tableau de variation de g sur $\mathbb{R}^+$