DL n° 1 : Arithmétiques dans $\mathbb{N}$ – Calcul vectoriel – Projection

Exercice 1

On considère les nombres $a = 6600$ et $b = 3234$.

1. Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.
2. Déduire PGCD(a, b) et PPCM(a, b)
3. Simplifier $\frac{a}{b}$, puis montrer que $\sqrt{ab}$ est un entier naturel.
4. Déterminer le plus petit naturel m pour que mb soit le cube d'un entier naturel.
5. Le nombre 437 est-il premier ? (Justifier) .
6. Soient a et b deux entiers naturels.
   - (a) Montrer que $(a+3)(b+2) = ab+3b+2a+6$
   - (b) Déterminer les entiers naturels a et b tels que
     $$ab + 3a + 2b = 9$$
   - (c) Déterminer les entiers naturels x et y tels que
     $$xy - x - y = 2$$

Problème : Vous avez deux types de cadeaux que vous souhaitez emballer dans des boîtes. Vous avez 45 jouets et 30 livres, et vous voulez mettre le même nombre de jouets et le même nombre de livres dans toutes les boîtes sans restes. Combien de boîtes pouvez-vous faire au maximum, et combien de chaque type de cadeau ira dans chaque boîte ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la parité des nombres suivants : $n^2 + 3n + 4$; $n^3 - n + 3$ et $3n(n + 1)^2$.
2. Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.
3. Vérifier que $\frac{n+17}{n+5} = 1 + \frac{12}{n+5}$, puis déduire les valeurs possibles de n pour que $\frac{n+17}{n+5} \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $(n^3 + 3n^2 + n)(n^3 + 3n^2 + n + 2) + 1$ est un carré parfait.
5. Soient $a = 5 \times 19^{2n+1} - 23 \times 19^{2n}$ et $b = 2 \times 19^{n+1} + 10 \times 19^n$.
   - (a) Montrer que a est un multiple de 72 et que b est un multiple de 48.
   - (b) Décomposer a et b en produits de facteurs premiers.

Exercice 3

Calcul vectoriel

ABC est un triangle. Soient E, F et P trois points du plan tels que

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{BC}.$$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
3. Montrer que
   $$\overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PF} = -2\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}.$$
4. (a) Montrer que $\overrightarrow{PF}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.
   (b) Montrer que les points E, F et P sont alignés.
5. Soit I le milieu de $[AB]$.
   - (a) Montrer que $\overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{IC}$.
   - (b) Que peut-on déduire ?

Projection dans le plan

ABC un triangle et D un point de (BC) n'appartenant pas à $[BC]$.

Soit M le point défini par : $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

► P le projeté de D sur (AC) parallèlement à (MC)

► Q est le projeté de D sur (AB) parallèlement à (MB)

1. Montrer que : $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$
2. En déduire que : $(PQ) \parallel (BC)$