Lycée qualifiant Mohamed VI Niveau : 1 BAC-SEG	DEVOIR LIBRE N° 2 A rendre le 12/12/2022	Professeur : Bouyguir Taher Année scolaire : 2022/2023

Exercice 1 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1. a - Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R} : x^2+x+1>0$
   b - Déduire l'ensemble de définition de f, $\mathcal{D}_f$.
2. a - Montrer que $\forall x\in\mathcal{D}_f : \frac{2}{3}\leqslant f(x)\leqslant 2$.
   b - Calculer $f(1)$ et $f(-1)$ et déduire les extremums de f.
3. Montrer que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{ab-1}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)}$, avec $(a,b\in\mathcal{D}_f \ et \ a\neq b)$.
4. Étudier les variations de f dans les intervalles $[1,+\infty[$, $[-1,1]$ et $]-\infty,-1]$.
5. Donner le tableau de variation de f .

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2(x+\frac{4}{x})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et Étudier la parité de f .
2. Montrer que $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=2(1-\frac{4}{ab})$, avec $(a,b\in\mathcal{D}_f \ et \ a\neq b)$.
3. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $]0;2]$ et $[2;+\infty[$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
5. Déterminer les extremums de f.
6. On considère une plaque rectangle dont l'air est 4 et la longueur de l'un de ces coté est x $(x>0)$
   a - Montrer que le périmètre, de la plaque obtenue est : $p(x)=2(x+\frac{4}{x})$.
   b - En déduire le périmètre minimal de cette plaque .

Exercice 3 :

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x)=-x^2+2x+1$; $g(x)=\sqrt{x-1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$, et dresser le tableau de variations des fonctions f et g.
2. Vérifier que $f(2)=g(2)$.
3. Construire dans le même repère orthonormé les courbes des deux fonctions f et g .
4. Résoudre graphiquement $f(x)<g(x)$. et $\sqrt{x-1}-2x\leq -x^2+1$.
5. Déterminer graphiquement $f([0;1])$ et $f([1;2])$.
6. On pose $h(x)=\sqrt{2x-x^2}$.
   (a) Determiner l'ensemble de définition de h.
   (b) Vérifier que $h(x)=gof(x)$.
   (c) Montrer que h est croissante sur $[0;1]$, et décroissante sur $[1;2]$.
   (d) Donner le tableau de variations de h, En Déduire que $\sqrt{2x-x^2}\leq 1$.

Bon Courage ☺

Exercice 4 :

La suit (u_n) définie par : $u_n = \frac{2n^2-1}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

1. calculer (u_1) et (u_2).
2. Montrez que (u_n) est croissante.
3. Montrez que (u_n) est majorée par 2 et minorée par 1.

Exercice 5 :

Une entreprise fabrique chaque jour x milliers d'objets avec $x \in [0;60]$. Le coûte total de production des ces objets, exprimé en millions de dirhams, est donnée par : $C(x) = x^2 - 30x + 300$.

1. Étudier les variations de C sur $[0;15]$ et $[15;60]$. et dresser le tableau de variation en faisant figurer les images aux bornes.
2. Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 10 dirhams. Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$ exprimée aussi en milliers de dirhams.
3. Justifier que le bénéfice, exprimé aussi en milliers de dirhams, réalisé pour la production et la vente de x milliers d'objets est donnée, pour $x \in [0;60]$, par : $B(x) = -x^2 + 40x - 300$.
4. Etudier les variations de B sur $[0;20]$ et $[20;60]$, et dresser le tableau de variation en faisant figurer les images au bornes.
5. En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal?
6. Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.En déduire les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.
7. (a) Tracer la courbe de la fonction B sur l'intervalle $[0;60]$ dans un repère orthonormé direct.
   (b) Résoudre graphiquement $B(x) \geq 40$. Quel est l'interprétation économique de ce résultat

Exercice 6 :

Une société fabrique un produit , le coût total de produire 100 unité au plus , dont une partie est fixée a 300DH et le reste est variable à 2DH par l'unité .

1. Soit x le nombre des unités de production. exprimer le coût total $C(x)$ en fonction de x.
2. Pour tout x de $]0,100]$, le nombre $f(x)$ tel que : $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ est appelé le coût unitaire moyen.
   a - Vérifier que : $f(x) = 2 + \frac{300}{x}$.
   b - Tracer le graphe de la fonction g , tel que $g(x) = \frac{300}{x}$.
3. Chaque unité de ce produit est vendue pour 5DH. en utilisant le graphe précédent, a partir de quelle quantité la production de la société sera rentable?

Exercice 7 :

Une entreprise de transport possède 40 camions en 2015. L'évolution de l'entreprise est telle que celle-ci doit acheter 8 camions supplémentaires chaque année. On note u_n le nombre de camions en l'année $2015 + n$, donc $u_0 = 40$.

1. Calculer le nombre de camions que possède l'entreprise en 2016, en 2017 et en 2018.
2. Ces nombres forment une suite?
3. Déterminer la relation de récurrence (u_n) .
4. Donner l'expression du nombre u_n de camions que possède l'entreprise l'année n.
5. Quel est le nombre de camions que possède l'entreprise en 2022?