Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad Niveau : 2 BAC-SPC	DEVOIR LIBRE N° 2 A rendre le 01/12/2025	Professeur : Bouyguir Taher Année scolaire : 2025/2026

Exercice 1 :(3.5Pts)

I)- Soit f est la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$.

1. Vérifier que $(x\in I): f(x)=\frac{3}{4(x-1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^2}$ ..... (0.5 pt)
2. Déterminer la primitive de f qui vérifie $F(2)=1$ ..... (1.5 pts)

II)- Déterminer les primitives des fonctions : $h(x)=(3-x^2)(x^3+9x-1)^4$ et $g(x)=\frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$..... (1.5 pts)

Exercice 2 :(9Pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=3; \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}; (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez en utilisant la récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}): 2<u_n<3$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotonie de la suite (u_n)..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $u_{n+1}-2\leq\frac{1}{4}(u_n-2)$ ..... (1 pt)
4. Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $0<u_n-2<\left(\frac{1}{4}\right)^n$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $v_n=\dfrac{2-u_n}{u_n+1}$
   (a) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. ..... (1 pt)
   (b) Calculez v_0 , puis exprimez v_n et u_n en fonction de n. ..... (1.5 pts)
7. On pose :$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k$; Calculer $\lim S_n$. ..... (1.5 pts)

Exercice 3 :(7.5Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$, Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ ..... (0.5 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats . ..... (1.5 pts)
3. (a) Montrer que : $(\forall x\in\mathcal{D}_f): f'(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2}$ ..... (1 pt)
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1.5 pts)
4. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y=1$ . ..... (1 pt)
5. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)
6. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]0;1]$
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (0.5 pt)
   (b) Tracez soigneusement dans même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ (avec une couleur différente)(0.5pt)