Devoir Libre n^o 2 : Projection - Ensembes des nombres - Ordre dans $\mathbb{R}$

Exercice 1

1. Nous considérons les nombres $a = 0.02$ et $b = 0.003$ et nous posons $M = \dfrac{a^3(a^3b^2)^{-2}b^3}{(a^2b)^{-2}}$. Déterminez l'écriture scientifique des nombres a, b, $\dfrac{a}{b}$ et $a \times b$, puis simplifiez et calculez le nombre M.
2. Simplifiez et calculez ce qui suit : $A = \dfrac{\frac{5}{4}-1}{\frac{5}{4}+1} + \dfrac{3-\frac{1}{3}}{3+\frac{1}{3}}$ et $B = 11\sqrt{3} - 2\sqrt{27} - \sqrt{75}$.
3. (a) Prouvez que pour tout $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{9}{x^2} = \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}\right)^2 + 2$.

   (b) Soit $Z = \sqrt{13} + 2$. Montrez que $\dfrac{Z}{3} - \dfrac{3}{Z} = \dfrac{4}{3}$, puis déduisez la valeur de $\dfrac{Z^2}{9} + \dfrac{9}{Z^2}$.

Exercice 2

Soient a et b deux nombres réels tels que $|2b-3| \leq 5$ et 5 une approximation de $4a-3$ par excès à 4 près.

1. Montrer que $1 \leq a \leq 2$ et $-1 \leq b \leq 4$.
2. Simplifier le nombre $A = |a+b| + |a-2b-4|$.
3. On pose : $x = \dfrac{6a^2+b}{\sqrt{b+5}+2}$

   (a) Montrer que : $1 \leq x \leq 7$

   (b) En déduire une valeur approchée de x à 3 près

Exercice 3

1. Soient les deux nombres réels x et y tels que $-1 \leq x \leq 3$ et $-3 \leq y \leq -1$

   (a) Encadrer : $x-y$, x^2 , y^2 , $3y^2$, $-2x^2$, $\dfrac{1}{y}$ et $\dfrac{1}{x^2}$

   (b) En déduire un encadrement de nombre : $-2x^2 + 3y^2 - \dfrac{1}{y}$

2. On considère les intervalles : $I =]-\infty;4]$, $J = \left[-\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ et $K = [-1;9]$

   (a) Déterminer : $I \cap J$, $K \cap J$, $I \cap K$, $I \cup J$ et $K \cup I$

   (b) Déterminer l'amplitude et le rayon et le centre de l'intervalle $I \cap K$

Exercice 4

Soit ABC un triangle et soient D un point de la droite (BC) $(D \notin [BC])$ et O un point du plan tel que $\overrightarrow{AO} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

Soit E le projeté du point D sur la droite (AC) parallèlement à la droite (OC).

Soit F le projeté du point D sur la droite (AB) parallèlement à la droite (OB).

a) Montrer que $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ b) Montrer que $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AF}$ c) Montrer que $(EF) \parallel (BC)$