Devoir Libre n^o 2 - S2 : Nombres complexes(P2) - ED - Calcul intégral

Exercice 1

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C des affixes respectivement $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$ et $c = -i$.

1. Déterminer l'affixe c' du point C' l'image de C par l'homothétie de centre B et de rapport -1.
2. Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Déterminer l'affixe du point K l'image de C par la rotation $\mathcal{R}$.
   (b) Déterminer l'affixe du point H l'image de C' par la rotation $\mathcal{R}$.
3. Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(4i)$. Déterminer les affixes des points N et L les images de C et C' respectivement par la translation T.
4. (a) Montrer que A est le milieu des deux segments $[LN]$ et $[KH]$
   (b) Montrer que $\frac{z_H - z_A}{z_L - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ puis déduire la nature de $KLHN$

Exercice 2

1. Calculer directement les intégrales : $A = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$; $B = \int_1^2 \frac{x^2+x+2}{x^3+2x^2}dx$; $C = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-cos(x)}dx$.
2. En utilisant l'intégration par partie calculer :
$$I = \int_0^1 x\sqrt{x+1}dx\,;\ J = \int_0^1 x\sqrt{e^x}dx\,;\ H = \int_0^{\pi} xe^x cos(x)dx$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^{2n+1}(x)}$
   (a) Vérifier que $(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right])$: $\frac{1}{cos(x)} = \frac{cos(x)}{2(1-sin(x))} + \frac{cos(x)}{2(1+sin(x))}$
   (b) Déduire la valeur de I_0.
   (c) En utilisant l'intégration par partie, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.
   (d) Déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^5(x)}$.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle : (1) $y'' - 5y' - 6y = 3e^{4x}$

1. Déterminer le réel α tel que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \alpha e^{4x}$ est une solution de (1)
2. Soit f une fonction dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est une solution de (1) si, et seulement si $f - g$ solution de l'équation : (2) $y'' - 5y' - 6y = 0$.
3. Résoudre l'équation (2).
4. Déduire la solution générale de l'équation (1)

Taher Bouyguir