# Devoir Libre $n^o$ 2 - S2 : Calcul intégral- ED - Produit scalaire dans l'espace

## Exercice 1 (7 Pts)

1. Calculer directement les intégrales : $(1 \times 3$ Pts $)$

$$A = \int_{-1}^{1} x^2 |x| \, dx \qquad B = \int_{1}^{2} \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2} dx \qquad L = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1 + e^{-x}} dx$$

2. On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x} cos(x) dx$ ; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x} sin(x) dx$

   (a) En utilisant l'intégration par partie sur $I$, montrer que : $I = e - J$ ..... (1 pt)

   (b) En utilisant l'intégration par partie sur $J$, montrer que : $J = I - 1$. ..... (1 pt)

   (c) En déduire la valeur de $I$ et $J$ ..... (1 pt)

3. Soit $g$ la fonction définie sur $[0;1]$ par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}_g$ autour de la l'axe des abscisses un tour complet. ..... (1 pt)

## Exercice 2 (4.5 Pts)

1. (a) Résoudre l'équation différentielle $(1)$ : $y'' + 5y' + 6y = 0$ ..... (1 pt)

   (b) Déterminer la solution $g$ de $(1)$ telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = -1$ ..... (1 pt)

2. (a) Résoudre l'équation différentielle $(2)$ : $y'' - 4y' + 3y = 0$ ..... (1 pt)

   (b) Déterminer la solution f de $(2)$ telle que la courbe de $f$ admet une tangente au point d'abscisse $0$ ; d'équation : $y = 3x - 1$ ..... (1.5 pts)

## Exercice 3 (8.5 Pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,0)$ ; $B(2,0,-2)$ et $C(1,2,1)$ on note $(P)$ le plan $(ABC)$

1. Vérifier que $\vec{n}(1,-1,1)$ un vecteur normal au plan $(P)$ ..... (1 pt)

2. Donner une équation cartésienne du plan $(P)$. ..... (1 pt)

3. Soit $(S)$ la sphère de centre $\Omega(1,2,4)$ et tangente au plan $(P)$ et soit $(Q)$ le plan d'équation : $2x + 3y + z - 6 = 0$

4. (a) Montrer que les plans $(P)$ et $(Q)$ sont orthogonaux. ..... (1 pt)

   (b) Déterminer le rayon de la sphère $(S)$ ..... (1 pt)

   (c) Donner une équation cartésienne de la sphère $(S)$. ..... (1 pt)

5. Soit $(\triangle)$ la droite qui passe par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(Q)$

   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(\triangle)$. ..... (1 pt)

   (b) Déterminer le point d'intersection de $(\triangle)$ et $(Q)$. ..... (1 pt)

6. Montrer que le plan $(Q)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle dont on déterminera le centre et le rayon. ..... (1.5 pts)