Devoir Libre n^o 3 : Suite numérique - Trigonométrie

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3; \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2}; (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 < u_n < 4$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n)
4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$
5. Déduire par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$
6. $(\forall n \in \mathbb{N})$, On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $S_n \geq 4n - 1 + \dfrac{4^{n+1}}{5^n}$
7. $(\forall n \in \mathbb{N})$, On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$
   (a) Écrire v_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique , déterminer sa raison et v_0.
   (c) Écrire v_n en fonction de n , puis en déduire u_n en fonction de n .

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Montrer que $\sqrt{3}cos(x) - sin(x) = 2cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ puis résoudre dans $[-\pi; \pi]$:
   $\sqrt{3}cos(x) - sin(x) = 1$ et $\sqrt{3}cos(x) - sin(x) > 1$
2. Soit $\beta \in \mathbb{R}$, Montrer que : $1 + cos(4\beta) + sin(4\beta) = 2\sqrt{2}cos(2\beta)sin\left(2\beta + \frac{\pi}{4}\right)$
3. Soit $\alpha \in \left]0 : \frac{\pi}{6}\right[$
   (a) Montrer que : $tan(3\alpha) = \dfrac{3tan(\alpha) - tan^3(\alpha)}{1 - 3tan^2(\alpha)}$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$ (remarquer que 1 est une racine de l'équation)
   (c) Déduire la valeur de $tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

   a) $\sqrt{\frac{1}{2} + sin(x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}sin(x)$. b) $cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$