Devoir Libre n^o 3 : Généralités sur les fonctions - Transformation

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2+2}$ b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{|x-1|-2}$ c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{|2x-5|+2}}{x^2+3x+8}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x|-1}$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est paire .
3. Etudions f sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$. Soit x et y deux nombres distincts de $]0;1[\cup]1;+\infty[$.
   (a) Montrer que le taux de variations de f est : $T = \dfrac{xy-x-y+4}{(x-1)(y-1)}$
   (b) Montrer que f est croissante sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$
4. En utilisant la parité de f en déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
5. Résoudre l'équation : $f(x) = 4$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I et J deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC} \quad \text{On pose} \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

1. Construire une figure convenable.
2. Vérifier que $t_{\vec{u}}(I) = J$, $t_{\vec{u}}(A) = B$ et déduire que $t_{\vec{u}}((AI)) = (BJ)$
3. (a) Soit h une homothétie, montrer que $h((BA)) \parallel (DC)$.
   (b) On suppose que $h(B) = C$ montrer que $h((BA)) = (DC)$ (remarquer que $B \in (BA)$).
4. Dans la suite de cette partie on suppose que $h(B) = C$ et que I est le centre de h.
   (a) Montrer que le rapport de h est $k = -2$.
   (b) Soit E l'image de J par h. Montrer que $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{JB}$, $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CE}$
5. Soit F le point d'intersection des droites (BA) et (ID), montrer que $h(F) = D$.
6. On pose $h(A) = A'$ montrer que les points D, C et A' sont alignés.

Exercice 4

Soit ABC un triangle. B' et C' deux points du plan tels que : $S_A(B) = B'$ et $S_A(C) = C'$. et B'' et C'' deux points du plan tels que : $S_{(AC)}(B) = B''$ et $S_{(AC)}(C) = C''$

1) Construire une figure convenable.

2) Montrer que $(B'C') \parallel (B''C'')$.