Devoir Surveillé n^o 1 : Logique - Généralités sur les fonctions

Exercice 1 (Quelques raisonnements 9 Pts)

1. On considère les deux propositions P et Q définies par :

$$P : \ll (\forall y \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,;\ \sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y} \gg$$
$$Q : \ll (\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2)\,;\ ab \leq |a+b| \leq \sqrt{a^2+b^2} \gg$$

   a) Nier les propositions P et Q. ..... (2 pts) b) Est ce que P est vraie ? (justifier) ... (0.5 pt)

   c) Montrer que Q est vraie. ..... (0.5 pt)

2. Nier la proposition : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ (x^2+1 \geq |x|) \vee (x^2+x=0 \Rightarrow x=0)$ ..... (1 pt)
3. Montrer en utilisant la contraposée que : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : (x \neq -1 \wedge y \neq -1) \Rightarrow x+y+xy \neq -1$ (1 pt)
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x-3| - x = 3$ . ..... (1 pt)
5. Montrer que $(\forall x \in [0;1[)\,;\ \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0$ ..... (1 pt)
6. Montrer par récurrence que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(3k+1) = 1+4+7+\cdots+(3n+1) = \frac{3n^2+5n+2}{2}$ ..... (2 pts)

Exercice 2 (4 Pts)

Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = x + \dfrac{4}{x}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_h$ puis étudier la parité de h. ..... (1 pt)
2. Montrer que $(\forall (x;y) \in \mathcal{D}_h^2)$ avec $x \neq y$ on a : $\dfrac{h(x)-h(y)}{x-y} = \dfrac{xy-4}{xy}$ ..... (1 pt)
3. En déduire la monotonie de h sur $]0;2]$ et sur $[2;+\infty[$ ..... (1 pt)
4. En utilisant la parité de h donner tableau de variation de h sur $\mathcal{D}_h$ ..... (1 pt)

Exercice 3 (4 Pts)

On considère les deux fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 - x - 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$

1. Dresser tableau de variations de f et de g. ..... (1.5 pts)
2. Vérifier que $f(2) = g(2)$. ..... (0.5 pt)
3. Construire dans même repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la courbe $(\mathcal{C}_g)$ . ..... (1 pt)
4. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour tout x dans $[1;+\infty[$ ..... (1 pt)

Exercice 4 (3Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

1. Vérifier que $(\forall x \in \mathcal{D}_f)\ x^2+x+1 > 0$ puis en déduire $\mathcal{D}_f$ ..... (1 pt)
2. Montrer que $f(1) = \dfrac{1}{3}$ est la valeur maximale de u sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1 pt)
3. Montrer que f est minorée par -1 sur $\mathcal{D}_f$. -1 est-elle la valeur minimale de f sur $\mathcal{D}_f$? (justifier) (1 pt)