DEVOIR SURVEILLÉ n^o 1 : LIMITE ET CONTINUITÉ

Exercice 1 (4.5 Pts)

1). Calculer les limites suivantes : ..... (3 × 1 pts)

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-5x-7}-x$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}$

2). Montrer que la fonction f est continue en 0 . $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)\sqrt{1-x}-2}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$ ..... (1.5 pt)

Exercice 2 (3 Pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x + 1$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution c dans l'intervalle $]-2;2[$. ..... (2 pts)
2. En utilisant la méthode de Dichotomie donner un encadrement de c d'amplitude 2. ..... (1 pt)

Exercice 3 (7 Pts)

Soit f la fonction définie sur $I =]-1;1[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$. ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)$ . ..... (1 pt)
3. Montrer que $(\forall x \in I) : f'(x) = \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$. ..... (1 pt)
4. Déduire la monotonie de f sur I. ..... (1 pt)
5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. .... (1 pt)
6. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$. ..... (1 pt)
7. Montrer que $(\forall x \in J^*) : f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x^2}-1}{2x}$. ..... (1 pt)

Exercice 4 (5.5 Pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1}+2 & x > 1 \\ \sqrt[3]{x}+x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

1. Montrer que g est continue au point 1. ..... (1 pt)
2. Étudier la dérivabilité de g à droite de 1 et à gauche de 1. ..... (2 pts)
3. f est-elle dérivable en 1 ? (justifier) ..... (0.5 pt)
4. Calculer f' la dérivée de f sue les deux intervalles $]1;+\infty[$ et $[0;1]$. ..... (2 pts)

FIN DU DEVOIR SURVEILLÉ