DEVOIR SURVEILLÉ n^o 1 : LIMITE ET CONTINUITÉ

Exercice 1 (4.5 Pts)

1). Calculer les limites suivantes : ..... (3 × 1 pts)

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{2x^2-5x-7}-x$ c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x+10}-2}{x+2}$

2). Montrer que la fonction f est continue en 0 . $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+2)\sqrt{1-x}-2}{x}; & x\neq 0\\ 0; & x=0\end{cases}$ ..... (1.5 pt)

Exercice 2 (3 Pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3+x+2$

1. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution c dans l'intervalle $]-2;0[$. ..... (2 pts)
2. En utilisant la méthode de Dichotomie donner un encadrement de c d'amplitude 1. ..... (1 pt)

Exercice 3 (7 Pts)

Soit f la fonction définie sur $I=]-2;2[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$. ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto(-2)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x)$ . ..... (1 pt)
3. Montrer que $(\forall x\in I): f'(x)=\dfrac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$. ..... (1 pt)
4. Déduire la monotonie de f sur I. ..... (1 pt)
5. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. .... (1 pt)
6. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{-1}{3}\right)$. ..... (1 pt)
7. Montrer que $(\forall x\in J^*): f^{-1}(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+16x^2}}{2x}$. ..... (1 pt)

Exercice 4 (5.5 Pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{2x-2}-2 & x>1\\ \sqrt[3]{x}-3x & 0\leq x\leq 1\end{cases}$

1. Montrer que g est continue au point 1. ..... (1 pt)
2. Étudier la dérivabilité de g à droite de 1 et à gauche de 1. ..... (2 pts)
3. g est-elle dérivable en 1 ? (justifier) ..... (0.5 pt)
4. Calculer g' la dérivée de g sur les deux intervalles $]1;+\infty[$ et $[0;1]$. ..... (2 pts)

FIN DU DEVOIR SURVEILLÉ