# Devoir Surveillé $n^o$ 1 : Limite et Continuité

## Exercice 1 (7 Pts : 1Pt/Q)

1). Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{x+6}-3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-\sqrt{x^2+x+4}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x+\sqrt{2x^2+3x-7}-1$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tan(x)-sin(x)}{x^3}$ e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[3]{x+3}-2}{x-5}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-x^3}{x^2+x-1}$

2). Montrer que la fonction $f$ est continue en $-3$ . $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)\sqrt{1-x}+2}{x+3}; & x \neq -3 \\ \dfrac{9}{4}; & x = -3 \end{cases}$

## Exercice 2 (3 Pts : 1Pt/Q)

On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}$

1. Résoudre dans $[-1;+\infty[$ l'équation : $\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}=0$ puis déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Calculer les limites : $lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Est ce que $f$ admet un prolongement par continuité en 0 ?

## Exercice 3 (7 Pts : 1Pt/Q)

Soit $f$ la fonction définie sur $I=[-1;0[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ , puis justifier que $f$ est continue sur $I$. (1Pt)
2. Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $I$. (1Pt)
3. Montrer que l'équation $f(x)=x^3$ admet une unique solution $\alpha$ dans $I$ .
4. En utilisant la méthode de Dichotomie déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0.25
5. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.
6. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x$ dans $J$
7. Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ ont un seul point commun que l'on déterminera.

## Exercice 4 (3 Pts : 0.5+1+0.5+1)

Soit $g$ la fonction définie sur $I=]-\infty;0]$ par : $g(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+2}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)$ , puis justifier que $g(x) = 1 - \dfrac{5}{x^2+2}$ .
2. Montrer que $f$ est strictement décroissante sur $I$.
3. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $\left[-\dfrac{3}{2};1\right[$.
4. Montrer que $\left(\forall x \in \left[-\dfrac{3}{2};1\right[\right)\ f^{-1}(x) = -\sqrt{\dfrac{3+2x}{1-x}}$.