Devoir Surveillé n^o 1 : Arithmétiques dans $\mathbb{N}$ - Calcul vectoriel | 2h

Exercice 1 (6 Pts)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ On pose : $x = 2n+7$ et $y = 9n^2+15n+6$

   a) Etudier la parité de x ..... (0.5 pt) b) Vérifier que : $y = (3n+2)(3n+3)$ .... (0.5 pt)

   c) En déduire la parité de y. ..... (0.5 pt) d) Montrer que $(x-1)\times y$ multiple de 6. (1 pt)

2. (a) Montrer que 107 est un nombre premier ..... (1 pt)

   (b) En déduire les diviseurs de 107 ..... (0.5 pt)

   (c) Trouver les entiers naturels n pour que : $\dfrac{107}{n-5} \in \mathbb{N}$ ..... (0.5 pt)

3. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que p est pair , montrer que $p^3+(p+1)^2-1$ multiple de 8 ..... (1.5 pt)

Exercice 2 (7 Pts)

1. On considère les nombres $a = 168$ et $b = 180$.

   (a) Décomposer a et b en produit des facteurs premiers ..... (1.5 pts)

   (b) En déduire $PGCD(a,b)$ et $PPCM(a,b)$ ..... (1 pt)

   (c) Simplifier $\dfrac{a}{b}$, puis montrer que $\sqrt{5\times b}$ est un entier naturel ..... (1 pt)

   (d) Déterminer le plus petit naturel m pour que $m \times ab$ soit un carré d'un entier naturel ..... (1 pt)

2. Déterminer les entiers naturels x et y, tels que : $xy - x + y - 1 = 3$ ..... (1.5 pts)

3. **Problème :** Deux bus partent de la même station à des intervalles différents. Le premier bus part toutes les 15 minutes et le second toutes les 20 minutes. Après combien de temps les deux bus partiront-ils en même temps ? ..... (1pt)

Exercice 3 (7 Pts)

1. ABC un triangle , I le milieu de $[BC]$ et J et K deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

   (a) Construire une figure convenable .... (1 pt)

   (b) Montrer que : ..... (1 pt)

$$\overrightarrow{JK} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

   (c) Montrer que : ..... (1 pt)

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

   (d) En déduire que I, J et K sont alignés. (0.5 pt)

   (e) Que peut-on dire sur les deux vecteurs : $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JK}$? ..... (0.5 pt)

   (f) Construire dans meme figure le vecteur : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IK}$ ..... (1 pt)

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et M est le milieu de $[AB]$ et N est le milieu de $[CD]$.

   (a) Faire la figure ..... (1 pt)

   (b) Montrer que O est le milieu de segment $[MN]$ ..... (1 pt)