Devoir Surveillé n^o 1 - $S\,2$: Limite d'une fonction

Exercice 1 (5 Pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. ..... (1 pt)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ..... (1 pt)
3. Dresser tableau de signe de x^2-2x. ..... (1 pt)
4. En déduire les limites : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ ..... (2 pts)

Exercice 2 (4 Pts)

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^2+x+1} - 3x$.

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ..... (2 Pts)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)+2x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} (g(x)+2x)$ ..... (2 Pts)

Exercice 3 (3 Pts)

Calculer les limites : (1 × 3 Pts)

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x^4}{x^3-1}$ b) $\lim\limits_{x\to0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{cos(x)+1-sin(x)}{x-\pi}$

Exercice 4 (4 Pts)

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+\dfrac{sinx}{2}} - cosx}{x}$$

1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : |h(x)| \leq \dfrac{\sqrt{4}+1}{|x|}$ ..... (1 Pt)
2. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ ..... (1 Pt)
3. Montrer que $h(x) = \dfrac{sin(x)(1+2sin(x))}{2x\left(\sqrt{1+\frac{sin(x)}{2}}+cos(x)\right)}$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to0} h(x)$ ..... (2 Pts)

Exercice 5 (4 Pts)

f la fonction définie par sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ (Voir derrière de la feuille).

Calculer les limites : (0.5 × 8 Pts)

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to6^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{f(x)-1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{f(x)-1}$ h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}$

