Devoir Surveillé n^o 1 : Limite d'une fonction

Exercice 1 (3 Pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2-5}{x(x^2-4)}$.

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$

Exercice 2 (3.5 Pts)

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^2+x-1}+x$.

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)-2x)$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$

Exercice 3 (3 Pts)

Calculer les limites : $(1\times 3Pts)$

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{3x^2-\sqrt{x}}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-cos(x)\sqrt{cos(2x)}}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{sin(x)-\sqrt{3}cos(x)}{3x-\pi}$

Exercice 4 (3Pts)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\dfrac{sinx}{2}}-cosx}{x}$$

1. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^*) : |f(x)| \le \dfrac{\sqrt{4}+1}{|x|}$
2. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Exercice 5 (2.5Pts)

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(ax+1)^n-1}{x} = na$, $(a\in\mathbb{R}^*)$ ..... (1 Pt)
2. Déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(11x+1)^{157}+(3x-1)^{97}}{x}$ ..... (1.5 Pts)

Exercice 6 (4Pts)

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+x^3+x^4+x^5-5}{x^2-1}$ .....(1 Pt)
2. Calculer : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2009}-2009x+2008}{(x-1)^2}$ ..... (1 Pt)
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{cos(x)+cos(2x)+cos(3x)-3}{x^2}$ . ..... (1 Pt)
4. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2010}\left[\dfrac{x}{x-1}-\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{2010}}\right)\right]$ . ..... (1 Pt)