Devoir Surveillé n^o 2 - $S2$: Rotation - Dérivation | 1h30

Exercice 1 (11 Pts)

On définit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{2x}{1-x^2} & si\ x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[\end{cases}$

1. Montrer que f est dérivable à gauche de 0. Interpréter le résultat ..... (1.5 pt)
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0. Interpréter le résultat ..... (1.5 pt)
3. f est elle dérivable en 0 ? justifier ..... (1 pt)
4. (a) Justifier que f est dérivable sur $[0;+\infty[$, puis calculer sa dérivée f'. ..... (1 pt)
   (b) En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$. ..... (1 pt)
5. (a) Montrer que $(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[),\ f'(x) = \dfrac{-5x^2+1}{(1-x^2)^2}$. ..... (1 pt)
   (b) Dresser le tableau de signe du trinôme : $-5x^2+1$ ..... (1 pt)
   (c) En déduire les variations de f sur $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$. ..... (1 pt)
   (d) En déduire les extremums de f sur $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$. ..... (1 pt)
6. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. ..... (1 pt)

Exercice 2 (3 Pts)

Calculer la dérivée des deux fonctions suivantes : ..... (3 pts)

$$u(x) = (x^3 + sin(2x-1))^{2023} \qquad v(x) = \sqrt{x^2+5x+12}$$

Exercice 3 (6 Pts)

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, I est milieu du segment $[AB]$, M est un point sur la droite (BC) tel que : $\overrightarrow{CM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CB}$ et (Δ) la droite perpendiculaire à la droite (OM) passant par O coupe la droite (AB) en N. Soir R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

1. Faire un figure ..... (1 pt)
2. Déterminer les images des droites (OM) et (BC) par la rotation R ..... (1 pt)
3. Montrer que $R(M) = N$ ..... (1 pt)
4. Vérifier que : $\overrightarrow{BN} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BA}$ et $(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{NO},\overrightarrow{NC}})[2\pi]$ ..... (1 pt)
5. Montrer que $AM = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$ et $ON = \dfrac{\sqrt{5}}{2}AB$ et en déduire la nature du triangle AMO ..... (2 pt)