Devoir Surveillé n^o 2 - $S2$: Rotation - Dérivation | 1h30

Exercice 1 (11 Pts)

On définit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{(x+1)^2} & si\ x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[\\ \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} & si\ x \in [0;1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$

1. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0. Interpréter le résultat ..... (1.5 pt)
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0. Interpréter le résultat ..... (1.5 pt)
3. f est elle dérivable en 0 ? justifier ..... (0.5 pt)
4. (a) Montrer que $(\forall x \in [0;1[\cup]1;+\infty[),\ f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$. ..... (1 pt)
   (b) En déduire les variations de f sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$. ..... (0.5 pt)
5. (a) Montrer que $(\forall x \in]-\infty;-1[\cup]-1;0[),\ f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$. ..... (1 pt)
   (b) Dresser le tableau de signe de f' sur : $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ ..... (1 pt)
   (c) En déduire le tableau de variations de f sur $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$. ..... (1 pt)
   (d) En déduire les extremums de f sur $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ s'ils existes. ..... (1 pt)
6. Donner le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1 pt)
7. Donner l'équation de la tangente de f au point d'abscisse -3. ..... (1 pt)

Exercice 2 (3 Pts)

Calculer la dérivée des deux fonctions suivantes : ..... (3 pts)

$$u(x) = \sqrt{tan^2(x) + x + 1} \qquad v(x) = \frac{x^3 - sin(x)}{cos(3-x)} \qquad w(x) = |x^2 - x| + 1$$

Exercice 3 (6 Pts)

Soit AIB un triangle isocèle rectangle en I tel que : $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}})$ est positive,. On trace è l'extérieur du triangle un parallélogramme $ABCD$ puis à l'extérieur du parallélogramme un carré $BFEC$. Soit R la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Construire une figure répondant aux hypothèses ..... (1 pt)
2. (a) Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BF}}) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ..... (1 pt)
   (b) Soit D' l'image de D par la rotation R montrer que : $D' = F$ et $BD' = BF$ ..... (1 pt)
3. Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) et H' le projeté orthogonal de F sur la droit (CD)
   (a) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par la rotation R. ..... (2 pt)
   (b) Déterminer C' l'image de C par la rotation R. (construire C'). ..... (1 pt)