Devoir Surveillé n^o 3 - S 2 : Étude des fonctions | 2h

Exercice 1 (9.5 Pts)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

1. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ..... (1 pt)
2. Étudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ ..... (1.5 pt)
3. Calculer la dérivé de f sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
4. Dresser tableau de signe de $x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$ ..... (0.5 pt)
5. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
6. Calculer $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
7. En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$. ..... (1.5 pts)
8. Montrer que le point $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrique de $(\mathcal{C}_f)$. ..... (1 pt)
9. Construire dans un repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C}_f)$. ..... (1 pt)

Exercice 2 (10.5 Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - x - 1$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ..... (1.5 pts)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$. Interpréter les résultats. ..... (1.5 pts)
3. (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) : f'(x) = \frac{-(x+1)(x^2-x+2)}{x^3}$. ..... (1 pt)
   (b) Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $x \mapsto \frac{-(x+1)}{x}$. ..... (0.5 pt)
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_f$. ..... (0.5 pt)
   (d) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1 pt)
4. Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (-x-1))$ puis déduire les branches infinies au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ ..... (1 pt)
5. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ ..... (1 pt)
   (a) Vérifier que : $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - x\right)$. $(\forall x \in \mathcal{D}_f)$ ..... (0.5 pt)
   (b) En déduire les deux points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses. ..... (1 pt)
6. Construire dans un repère orthonormé la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (D) . ..... (1 pt)

Bon Courage

Taher Bouyguir