Devoir Surveillé n^o 1 - $S\,2$: Limite d'une fonction

Exercice 1 (5 Pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2+x-1}{x^2-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. ..... (1 pt)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ..... (1 pt)
3. Dresser tableau de signe de x^2-x. ..... (1 pt)
4. En déduire les limites : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ..... (2 pts)

Exercice 2 (3.5 Pts)

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$.

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ..... (1.5 Pts)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)+x)$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} (g(x)+3x)$ ..... (2 Pts)

Exercice 3 (3 Pts)

Calculer les limites : (1 × 3 Pts)

a) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-7x+6}{x^5-1}$ b) $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{cos(x)-sin(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$

Exercice 4 (4.5 Pts)

On considère la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{cos(x)-\sqrt{sin(x)+1}}{x}$

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ..... (1 Pt)
2. Montrer que $(\forall x \in]-\infty;0[) : |h(x)| \leq \dfrac{1+\sqrt{2}}{|x|}$ ..... (1 Pt)
3. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ ..... (0.5 Pt)
4. Montrer que $(\forall x \in]-\infty;0[) : h(x) = \dfrac{-sinx(sinx+1)}{x(cosx+\sqrt{sin(x)+1})}$ ..... (1 Pt)
5. En déduire $\lim\limits_{x\to0^-} h(x)$. ..... (1 Pt)

Exercice 5 (4 Pts)

f la fonction définie par sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ (Voir derrière de la feuille).

Calculer les limites : (0.5 × 8 Pts)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ e) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{f(x)-1}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-2}$ h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

