Devoir Surveillé n^o 2 : Étude des fonctions - Suites numériques

Exercice 1 (10.5 Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{x+1}$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ et calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. ..... (1.5 pts)
2. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats. (2 pts)
3. (a) Montrer que : $(\forall x\in\mathcal{D}_f) : f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ..... (1 pt)
   (b) En déduire que f est croissante sur les deux intervalles : $]-\infty;-3]$, $[1;+\infty[$ ..... (0.5 pt)
   (c) En déduire que f est décroissante sur $[-3;-1[\cup]-1;1]$. ..... (0.5 pt)
   (d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1 pt)
4. Vérifier que $f(x) = x+2+\dfrac{4}{x+1}$, $(\forall x\in\mathcal{D}_f)$ ..... (0.5 pt)
5. (a) Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ ..... (1 pt)
   (b) En déduire les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ ..... (1 pt)
6. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y = x+2$ . ..... (1 pt)
7. Écrire l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point $x_0 = 0$ ..... (0.5 pt)
8. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)

Exercice 2 (9.5 Pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}) : 2 < u_n < 4$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite (u_n). ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $0 < 4-u_{n+1} < \dfrac{4}{5}(4-u_n)$ ..... (1.5 pts)
4. Déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $0 < 4-u_n < \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})$, $v_n = \dfrac{u_n-4}{u_n-2}$
   (a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (0.5 pt)
   (b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. ..... (1 pt)
   (c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (0.75 pt)
7. Déduire u_n en fonction de n. ..... (0.75 pt)
8. On pose : $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n$ montrez que $(\forall n\in\mathbb{N})$, $S_n \geq 4n-1+\dfrac{4^{n+1}}{5^n}$ ..... (1 pt)

Bon Courage ☺

Taher Bouyguir