# Devoir Surveillé $n^o$ 2 : Étude des fonctions - Suites numériques

## Exercice 1 (10.5 Pts)

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat. ..... (1 pt)
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat . ..... (1 pt)
4. (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) : f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2}$ ..... (1 pt)
   (b) En déduire que $f$ est croissante sur $[1; +\infty[$ ..... (0.5 pt)
   (c) En déduire que $f$ est décroissante sur $]0; 1]$. ..... (0.5 pt)
   (d) Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1 pt)
5. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $(D)$ d'équation $y = 1$ . ..... (1 pt)
6. Écrire l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point $x_0 = 1$ ..... (0.5 pt)
7. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et $(D)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ..... (1 pt)
8. Soit $g$ la restriction de $f$ sur $]0; 1]$
   (a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J$ à déterminer. ..... (1 pt)
   (b) Tracez dans même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ ..... (1 pt)

## Exercice 2 (9.5 Pts)

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2}; \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 2$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite $(u_n)$. ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < 2 - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(2 - u_n)$ ..... (1 pt)
4. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ , $0 < 2 - u_n < \dfrac{3}{2^{n+1}}$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite $(u_n)$ est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 2}$
   (a) Exprimez $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$ ..... (1 pt)
   (b) Montrez que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 4. ..... (0.5 pt)
   (c) Calculez $v_0$ puis exprimez $v_n$ en fonction de $n$. ..... (1 pt)
7. Déduire $u_n$ en fonction de $n$. ..... (1 pt)
8. On pose :$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{3}{u_k - 2}$ montrez que $(\forall n \in \mathbb{N})$ , $S_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4^n}{3} - n$ ..... (1 pt)