Devoir Surveillé n^o 2 : Étude des fonctions - Suites numériques

Exercice 1 (10.5 Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ ..... (1 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat. ..... (1 pt)
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat . ..... (1 pt)
4. (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f) : f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2}$ ..... (1 pt)
   (b) En déduire que f est croissante sur $[1; +\infty[$ ..... (0.5 pt)
   (c) En déduire que f est décroissante sur $]0; 1]$. ..... (0.5 pt)
   (d) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1 pt)
5. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite (D) d'équation $y = 1$ . ..... (1 pt)
6. Écrire l'équation de la tangente de $(\mathcal{C}_f)$ au point $x_0 = 1$ ..... (0.5 pt)
7. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ..... (1 pt)
8. Soit g la restriction de f sur $]0; 1]$
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle J à déterminer. ..... (1 pt)
   (b) Tracez dans même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$. ..... (1 pt)

Exercice 2 (9.5 Pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3; \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 2$ ..... (1 pt)
2. Montrez que (u_n) est décroissante. ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$ ..... (1 pt)
4. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < u_n - 2 < \left(\frac{1}{4}\right)^n$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $v_n = \frac{2 - u_n}{u_n + 1}$
   (a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (1 pt)
   (b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. ..... (0.5 pt)
   (c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (1 pt)
7. Montrez que $u_n = \frac{2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$. ..... (1 pt)
8. Calculer $\lim u_n$ ..... (1 pt)