Devoir Surveillé n^o 2 : Étude des fonctions - Suites numériques

Exercice 1 (10.5 Pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{x^2-2x}$

Et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrez que $\mathcal{D}_f =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ et calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$. ..... (1.5 pts)
2. Étudiez la dérivabilité de la fonction f à gauche en 0 et à droite en 2, puis interprétez chaque résultat graphiquement. ..... (1.5 pts)
3. Montrez que : $(\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0;2\}) : f'(x) = \dfrac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x}}$ ..... (1 pt)
4. Étudiez le signe de f' puis dressez le tableau de variations de la fonction f ..... (1.5 pts)
5. Étudiez les branches infinies de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. ..... (1.5 pts)
6. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)
7. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty;0]$
   (a) Montrez que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. ..... (1 pt)
   (b) Vérifiez que $g^{-1}(-\sqrt{3}) = -1$ et déduire $(g^{-1})'(-\sqrt{3})$ ..... (1 pt)
   (c) Tracez $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (0.5 pt)

Exercice 2 (9.5 Pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n-1)}{u_n+2} \end{cases}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrez en utilisant le récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 < u_n < 4$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotone de la suite (u_n). ..... (1 pt)
3. Montrez que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < 4-u_{n+1} < \dfrac{4}{5}(4-u_n)$ ..... (1.5 pts)
4. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < 4-u_n < \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite (u_n) est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = \dfrac{u_n-4}{u_n-2}$
   (a) Exprimez v_{n+1} en fonction de u_n ..... (0.5 pt)
   (b) Montrez que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. ..... (1 pt)
   (c) Calculez v_0 puis exprimez v_n en fonction de n. ..... (0.75 pt)
7. Déduire u_n en fonction de n. ..... (0.75 pt)
8. On pose : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ montrez que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $S_n \geq 4n - 1 + \dfrac{4^{n+1}}{5^n}$ ..... (1 pt)

Bon Courage ☺

Taher Bouyguir