| Lycée qualifiant Tariq Ben Zyad<br>Niveau : 2 BAC-SPC | DEVOIR SURVEILLÉ N° 2<br>Durée : 2h00min | Professeur : Bouyguir Taher<br>Année scolaire : 2025/2026 |
|---|---|---|

## Exercice 1 :(3.5$Pts$)

**I)**- Soit $f$ est la fonction définie sur $I=]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{4x^2+4x+4}{(x^2-1)^2}$.

1. Vérifier que $(x\in I): f(x)=\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$ ..... (0.5 pt)
2. Déterminer la primitive de $f$ qui vérifie $F(2)=0$ ..... (1.5 pts)

**II)**- Déterminer les primitives des fonctions : $h(x)=(x^2+3)(x^3+9x-1)^4$ et $g(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+2}}$..... (1.5 pts)

## Exercice 2 :(9$Pts$)

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2};(n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1. Montrez en utilisant la récurrence que $(\forall n\in\mathbb{N}): 0<u_n<2$ ..... (1 pt)
2. Étudiez la monotonie de la suite $(u_n)$..... (1 pt)
3. Montrez que $(\forall n\in\mathbb{N}): 0<2-u_{n+1}<\frac{1}{2}(2-u_n)$ ..... (1 pt)
4. En déduire que $(\forall n\in\mathbb{N}): 0<2-u_n<\frac{3}{2^{n+1}}$ ..... (1 pt)
5. Montrez que la suite $(u_n)$ est convergente en déterminant sa limite . ..... (1 pt)
6. On pose $(\forall n\in\mathbb{N}): v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$
   (a) Montrez que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 4. ..... (1 pt)
   (b) Calculez $v_0$ , puis exprimez $v_n$ et $u_n$ en fonction de $n$. ..... (1.5 pts)
7. On pose :$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{3}{u_k-2}$ montrez que $(\forall n\in\mathbb{N}): S_n=\frac{1}{3}-\frac{4^n}{3}-n$ , puis Calculer $\lim S_n$. ..... (1.5 pts)

## Exercice 3 :(7.5$Pts$)

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}$ , Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$ ..... (0.5 pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ , puis interpréter graphiquement les résultats . ..... (1.5 pts)
3. (a) Montrer que : $(\forall x\in\mathcal{D}_f): f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x^2}$ ..... (1 pt)
   (b) Déterminer le signe de $f'(x)$ , puis dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathcal{D}_f$. ..... (1.5 pts)
4. Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec la droite $(D)$ d'équation $y=1$ . ..... (1 pt)
5. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et $(D)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. ..... (1 pt)
6. Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ sur l'intervalle $I=]0;1]$
   (a) Montrer que $g$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle $J$ à déterminer. ..... (0.5 pt)
   (b) Tracez soigneusement dans même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ (avec une couleur différente)(0.5pt)

Bon Courage ☺