Devoir Surveillé n^o 1 - S2 : Les Nombres complexes

Exercice 1 (14 Pts)

Partie I)

On considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct les points A ,B , C et D des affixes respectives : $a = 3+4i$, $b = 3+8i$ et $c = 2+3i$ et $d = 5+6i$

1. Montrer que les points A , C et D sont alignés ..... (1 pt)
2. Montrer que : $\dfrac{a-b}{d-b} = 1-i$, puis écrire le nombre $\dfrac{a-b}{d-b} = 1-i$ sous la forme exponentielle. ..... (2 pts)
3. Déterminer la mesure d'angle $(\widehat{\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}})$ . ..... (1 pt)
4. Montrer que $BD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BA$ ..... (1 pt)

Partie II)

On pose : $u = \sqrt{3}-i$, $v = \sqrt{2}(1+i)$ et $w = u+v$

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes u ;v et $\dfrac{u}{v}$. ..... (2 pts)
2. Déterminer la forme algébrique du nombre $\dfrac{u}{v}$. ..... (1 pt)
3. En déduire les valeurs de $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$. ..... (1 pt)
4. On considère dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé direct les points E ;F et P d'affixes respectives : u ; v et w.
   (a) Montrer que $OEPF$ est un losange. ..... (1 pt)
   (b) Déterminer la mesure d'angle $(\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}})$ . ..... (1 pt)
5. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{5\pi}{12}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de rotation R. ..... (1 pt)
   (b) Montrer que $R(E) = F$ ..... (1 pt)
6. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $\left|\dfrac{z+i-\sqrt{3}}{i+1}\right| = 1$ ..... (1 pt)

Exercice 2 (6 Pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2-4z+5 = 0$ et $(2+3i)\overline{z}+(1-i)z = 1+6i$ ..... (2 pts)
2. Dans le plan complexe, on considère les points A ,B et C des affixes respectives : $a = -2i$, $b = 2+2i$ et $c = -1+i$
   (a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle. ..... (1 pt)
   (b) Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ un parallélogramme ..... (1 pt)
3. Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$
   (a) Déterminer l'écriture complexe de la translation T. ..... (1 pt)
   (b) Montrer que : $T(D) = C$ ..... (1 pt)

Taher Bouyguir