Devoir Surveillé n^o 1 - S2 : Fonction Exponentielle - Nombres complexes(P1)

Exercice 1 (10.25 Pts)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1-x)e^x - 1$

1. Calculez $g'(x)$ puis dressez tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
2. Vérifier que $g(0) = 0$ puis déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) \leq 0$ ..... (0.75 pt)

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2-x)e^x - x$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... (0.5 pt)
2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis étudiez le branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ ..... (1 pt)
3. Montrez que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ puis calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x)$ ..... (1.25 pts)
4. Déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$ ..... (0.5 pt)
5. Calculer f' puis dressez le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ..... (1.25 pt)
6. Étudiez le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$ puis déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec (D). ..... (1.5 pt)
7. Déterminez le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ ..... (1 pt)
8. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ..... (1.5 pt)

Exercice 2 (6 Pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+2i)(z^2+1) = 0$ et $z - 2\overline{z} = -1 + 3i$ ..... (2 pts)
2. On pose $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$
   (a) Déterminer la forme trigonométriques de z_1 et z_2 ..... (1 pt)
   (b) Déduire la forme trigonométrique de $z_1 z_2$ ..... (0.5 pt)
3. Écrire sous forme algébrique $z_1 z_2$, puis déduire les valeurs de $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ ..... (1.5 pts)
4. Montrer que : $\left(\dfrac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{48} + \left(\dfrac{z_2}{2}\right)^{48} = 2$ ..... (1 pt)

Exercice 3 (3.75 Pts)

1. On considère les points : $A(-2i)$, $B(2+2i)$ et $C(-1+i)$
   (a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle . ..... (1.25 pt)
   (b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. ..... (1 pt)
2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on pose : $u = \dfrac{z-i}{z-1}$.
   Déterminer (E) l'ensemble des pointes $M(z)$ tel que u imaginaire pur. ..... (1.5 pts)

Taher Bouyguir