Devoir Surveillé n^o 1 - S2 : Fonction Exponentielle - Nombres complexes(P1)

Exercice 1 (10.5 Pts)

Partie I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1. Calculez $g'(x)$ puis dressez tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
2. Vérifier que $g(-0.5) > 0$ puis déduire que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $g(x) > 0$ ..... (0.75 pt)

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... (0.5 pt)
2. Calculez $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis étudiez le branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ ..... (1 pt)
3. Montrez que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ puis calculez $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ..... (1 pts)
4. Déduire que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) au voisinage de $-\infty$ ..... (0.75 pt)
5. Calculer f' puis dressez le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ ..... (1 pt)
6. Étudiez la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ avec (D). ..... (1.5 pt)
7. Déterminez le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$ ..... (1 pt)
8. Tracez soigneusement $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ..... (1.5 pt)

Exercice 2 (5.5 Pts)

On considère les deux nombres : $z_1 = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$ et $z_2 = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}+1)i$

1. Montrer que $z_1^2 = 4(\sqrt{3}+i)$ et $z_2 = i\overline{z_1}$ ..... (1.5 pt)
2. Écrire sous forme trigonométrique le nombre $4(\sqrt{3}+i)$. ..... (1 pt)
3. En déduire sous forme trigonométrique les nombres z_1 et z_2 ..... (1.5 pt)
4. Soit $A(z_1)$ et $B(z_2)$ deux points, calculer $arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)$ puis déduire la nature du triangle OAB .. (1.5 pt)

Exercice 3 (4 Pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 3z + 4 = 0$ et $z + 2\overline{z} = 6 + i$ ..... (1.5 pt)
2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ montrer que : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left|\dfrac{1+iz}{1-iz}\right| = 1$ ..... (1 pt)
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ dans les cas suivants : ..... (1.5 pt)

   a) $|z - 3 + 2i| = 5$ b) $|iz + 2 - i| = 3$ c) $\dfrac{z-2i}{z-3} \in \mathbb{R}$

Taher Bouyguir