Devoir Surveillé : 2 - S2 : Calcul intégral - Produit scalaire dans l'espace | 1h30

Exercice 1 (8.5 Pts)

1. Vérifier que $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ puis calculer : $\int_1^2 \frac{1}{t(t+1)}dt$ ..... (1.5 pts)
2. On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos^2(x)dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sin^2(x)dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(2x)dx$
   (a) Calculer $I + J$ ..... (1 pt)
   (b) En utilisant l'intégration par partie deux fois montrer que : $K = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$. ..... (2 pts)
   (c) Vérifier que $I - J = K$ ..... (1 pt)
   (d) En déduire la valeur de I et J. ..... (2 pts)
3. Soit h la fonction définie sur $[0;1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ autour de la l'axe des abscisses un tour complet..... (1 pt)

Indication : $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

Exercice 2 (11.5 Pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère la sphère (S) de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon $R = 3$ et la plan (P) passant par le point $A(-1;0;3)$ de vecteur normal $\vec{n}(4;0;-3)$

1. Donner l'équation cartésienne de la sphère (S). ..... (1 pt)
2. Vérifier que $4x - 3z + 13 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P). ..... (1 pt)
3. Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire à (P)
   (a) Vérifier que : $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ). .... (1 pt)
   (b) Déterminer les coordonnées du point B d'intersection de (Δ) et (P) ..... (1 pt)
   (c) Vérifier que B appartient à la sphère (S) ..... (1 pt)
   (d) la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux point B et C déterminer les coordonnées de C (1.5 pt)
4. Montrer $d(\Omega, (P)) = 3$, Que peut-en déduire ? ..... (1 pt)
5. Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P) ..... (1 pt)
6. Soit (Q) le plan d'équation $3x + y + 4z - 3 = 0$.
   (a) Montrer que $(P) \perp (Q)$ ..... (1 pt)
   (b) Calculer $d(\Omega, (Q))$ et déduire que (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle $\mathcal{C}$ ..... (1 pt)
   (c) Déterminer le rayon de cercle $\mathcal{C}$ ..... (1 pt)