Devoir Surveillé n^o 2 - S2 : Nombres complexes(P2) - ED - Calcul intégral

Exercice 1 (6 Pts)

I)-Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C des affixes respectivement $a = 3 + i\sqrt{3}$, $b = 3 - \sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})$ et $c = 4$.

1. Vérifier que $b = a(1 + i)$ ..... (1 pt)
2. Soit H l'homothétie de centre C et de rapport $1 + \sqrt{3}$
   (a) Déterminer l'écriture complexe de H. ..... (1 pt)
   (b) Montrer que B est limage de A par l'homothétie H. ..... (1 pt)
3. Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   Montrer que le point D d'affixe : $d = -\sqrt{3} + 3i$ est l'image de A par la rotation $\mathcal{R}$ ..... (1 pt)
4. Montrer que D est l'image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$..... (1 pt)

II)- En utilisant la formule de Moivre montrer que : $sin^3(x) = \frac{-1}{4}(sin(3x) - 3sin(x))$ ..... (1 pt)

Exercice 2 (9.5 Pts)

1. Calculer directement les intégrales : (1×3 Pts)

$$A = \int_{-1}^{1} x^2 |x| \, dx \qquad B = \int_0^{\pi} sin^3(x) dx \qquad L = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^{-x}} dx$$

2. En utilisant l'intégration par partie calculer : ($1.5 + 1$ Pts)

$$I = \int_1^e x^3 ln(x) dx \qquad J = \int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2} dx$$

3. On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x} cos(x) dx$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{1-x} sin(x) dx$
   (a) En utilisant l'intégration par partie sur I, montrer que : $I = e - J$ ..... (1 pt)
   (b) En utilisant l'intégration par partie sur J, montrer que : $J = I - 1$. ..... (1 pt)
   (c) En déduire la valeur de I et J ..... (1 pt)
4. Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$. Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $\mathcal{C}_g$ autour de la l'axe des abscisses un tour complet..... (1 pt)

Exercice 3 (4.5 Pts)

1. (a) Résoudre l'équation différentielle (1) : $y'' + 5y' + 6y = 0$ ..... (1 pt)
   (b) Déterminer la solution g de (1) telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = -1$ ..... (1 pt)
2. (a) Résoudre l'équation différentielle (2) : $y'' - 4y' + 3y = 0$ ..... (1 pt)
   (b) Déterminer la solution f de (2) telle que la courbe de f admet une tangente au point d'abscisse 0 ; d'équation : $y = 3x - 1$ ..... (1.5 pts)

Taher Bouyguir