Devoir Surveillé n^o 1 - S2 : Les Nombres complexes

Exercice 1 (5 Pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 4z + 16 = 0$ ..... (1 pt)
2. On considère les deux nombres complexes : $a = 2 - i2\sqrt{3}$ et $b = -1 - i\sqrt{3}$
   (a) Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ..... (1 pt)
   (b) On pose $U = \frac{b}{a}$, déterminer le module et l'argument de U ..... (1 pt)
3. Dans le plan complexe, on considère les points : $A(a)$ et $B(b)$
   (a) Vérifier que : $\frac{b-a}{b} = -i\sqrt{3}$ ..... (1 pt)
   (b) En déduire que le triangle OAB rectangle en B. ..... (1 pt)

Exercice 2 (7 Pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z + 2i)(z^2 + 1) = 0$ et $z - 2\overline{z} = -1 + 3i$ ..... (2 pts)
2. On pose $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$
   (a) Déterminer la forme trigonométriques de z_1 et z_2 ..... (1 pt)
   (b) Déduire la forme trigonométrique de $z_1 z_2$ ..... (1 pt)
3. Écrire sous forme algébrique $z_1 z_2$, puis déduire les valeurs de $cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ ..... (2 pts)
4. Montrer que : $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{48} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{48} = 2$ ..... (1 pt)

Exercice 3 (8 Pts)

1. Dans le plan complexe, on considère les points A ,B et C des affixes respectives : $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$ et $c = 2 + i$
   (a) Calculer le rapport : $\frac{a-c}{b-c}$ en déduire que les points A, B et C sont alignés. ..... (1 pt)
   (b) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}(1 + 5i)$. Vérifier que l'affixe du point D l'image de C par la translation T est : $d = 3 + 6i$ ..... (1 pt)
   (c) Montrer que : $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$. ..... (1 pt)
   (d) Montrer que l'argument du nombre : $-1 + i$ est : $\frac{3\pi}{4}$. ..... (1 pt)
   (e) En déduire la mesure de l'angle orienté : $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}})$ ..... (1 pt)
2. Soit $\mathcal{R}$ la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   (a) Déterminer l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}$. ..... (1 pt)
   (b) Déterminer l'affixe du point $K(z_k)$, l'image du point B par la rotation $\mathcal{R}$ ..... (1 pt)
   (c) Déterminer l'ensemble des points tels que : $|z - a| = |z_k|$ ..... (1 pt)

Taher Bouyguir